

प्रतिदर्श प्रश्नपत्र–2020

इण्टरमीडिएट गणित–(केवल प्रश्नपत्र)

समय : 3 घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

निर्देश: प्रारम्भ के पन्द्रह मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

- नोट—**
- (i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - (ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - (iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
 - (iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - (v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - (vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1— सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर–पुस्तिका में लिखिए—

(क) फलन $f : R \rightarrow R, f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है सही उत्तर का चयन कीजिए— 01

- (i) f एकैकी आच्छादक है।
- (ii) f बहुएक आच्छादक है।
- (iii) f एकैकी है किन्तु आच्छादक नहीं है।
- (iv) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

(ख) समाकलन $\int \cos^2 x dx$ का मान होगा— 01

- (i) $\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + c$
- (ii) $\frac{\cos^3 x}{3} + C$
- (iii) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c$
- (iv) $\frac{\cos 2x}{2} + \frac{x}{2} + c$

(ग) अवकल समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि एवं घात है— 01

(i) 2, 2

(ii) 3, 2

(iii) 3, 1

(iv) 1, 3

(घ) यदि $\text{Sin}^{-1}x = y$, तो 01

(i) $0 \leq y \leq \pi$

(ii) $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(iii) $0 < y < \pi$

(iv) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

(ङ) यदि सदिश $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है—

(i) 0

(ii) -1

(iii) 1

(iv) 3

01

2. सभी खण्ड कीजिए—

(क) समुच्चय $\{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या ज्ञात कीजिए। 01

(ख) $f(x) = \text{Sin } x^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए। 01

(ग) $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})$ का प्रति अवकलज ज्ञात कीजिए। 01

(घ) A तथा B दो घटनाएँ ऐसी है कि $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ है तो $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए। 01

(ङ) निम्न अवरोधों $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ के अन्तर्गत $z = -3x + 4y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए। 01

3. सभी खण्ड कीजिए—

(क) मान लीजिए कि $f: R \rightarrow R, f(x) = 4x - 3 \forall x \in R$ द्वारा परिभाषित एक फलन है, तो f^{-1} लिखिए। 02

- (ख) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \sin 2x}$ ज्ञात कीजिए। 02
- (ग) सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ के योग के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। 02
- (घ) यदि $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ और $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ है तो $P(A|B)$ तथा $P(B|A)$ ज्ञात कीजिए। 02

4. सभी खण्ड कीजिए—

- (क) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 02
- (ख) यदि किसी रेखा के दिक् अनुपात 1, 1, 2 है तो उसकी दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए। 02
- (ग) दो समतलों $2x+y-2z=5$ और $3x-6y-2z=7$ के बीच का कोण सदिश विधि द्वारा ज्ञात कीजिए। 02
- (घ) एक पासे को एक बार उछाला जाता है। घटना 'पासे पर प्राप्त संख्या 3 का अपवर्त्य है' को E से और 'पासे पर प्राप्त संख्या सम है' को F से निरूपित किया जाए तो ज्ञात कीजिए कि क्या घटनाएँ E और F स्वतन्त्र हैं? 02

5. सभी खण्ड कीजिए।

- (क) सिद्ध कीजिए कि यदि $f : A \rightarrow B$ तथा $g : B \rightarrow C$ आच्छादक है, तो $g \circ f : A \rightarrow C$ भी आच्छादक है। 05
- (ख) बिना प्रसरण किए और सारणिकों के गुणधर्म का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए— 05

$$\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+P & z+x \\ a+b & P+q & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & P & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$

(ग) प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए। जो वक्र $y + \frac{2}{x-3} = 0$ को स्पर्श करती है। 05

(घ) धनात्मक अचर a के लिए $\frac{dy}{dx}$, ज्ञात कीजिए जहाँ $y = a^{t+\frac{1}{t}}$, तथा $x = (t + \frac{1}{t})^a$ है। 05

(ङ) समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) - 4 = 0$ और $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + 5 = 0$ के प्रतिच्छेदन रेखा को अंतर्विष्ट करने वाले तथा तल $\vec{r} \cdot (5\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}) + 8 = 0$ के लम्बवत् तल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 05

6. सभी खण्ड कीजिए—

(क) $\int_{-1}^{3/2} |x \sin \pi x| dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 05

(ख) दर्शाइए कि अवकल समीकरण $(x-y) \frac{dy}{dx} = x + 2y$ समघातीय है और इसका हल ज्ञात कीजिए। 05

(ग) रेखाओं l_1 और l_2 के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जिनके सदिश समीकरण हैं:— 05

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

(घ) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए। निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत — 05

$$x + 2y \geq 10 \text{ -----(1)}$$

$$3x+4y \leq 24 \text{ -----(2)}$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ -----(3)}$$

$z = 200x + 500y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

- (ड) एक कलश में 5 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करने के बाद पुनः कलश में रख दी जाती है। पुनः निकाले गए रंग की 2 अतिरिक्त गेंदें कलश में रख दी जाती है तथा कलश में से एक गेंद निकाली जाती है। दूसरी गेंदें की लाल होने की प्रायिकता क्या है? 05

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए—

- (क) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$2x - 3y + 3z = 5$$

$$x - 2y + z = -4$$

$$3x - y - 2z = 3$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 08

- (ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि

$$A \cdot \text{adj } A = |A| \cdot I \text{ और } A^{-1} \text{ ज्ञात कीजिए।} \quad 08$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए—

- (क) अवकल समीकरण $(\tan^{-1} y - x) dy = (1 + y^2) dx$ का हल ज्ञात कीजिए। 08

[6]

(ख) दो परवलयों $y = x^2$ एवं $y^2 = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 08

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए—

(क) उन अन्तरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें फलन

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

(a) निरंतर वर्धमान है। (b) निरंतर ह्रासमान है। 08

(ख) एक घन का आयतन $9 \text{ Cm}^3/\text{S}$ की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लम्बाई 10 Cm है तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है। 08
