

29T MATH

**2019**

**MATHEMATICS**

**Full Marks : 100**

---

**Pass Marks : 30**

**Time : Three hours**

*The figures in the margin indicate full marks  
for the questions.*

<i>Q. No. 1 (a–j) carries 1 mark each</i>	$1 \times 10 = 10$
<i>Q. Nos. 2–13 carry 4 marks each</i>	$4 \times 12 = 48$
<i>Q. Nos. 14–20 carry 6 marks each</i>	$6 \times 7 = 42$
	<hr/>
	Total = 100

*Contd.*

1. Answer the following questions :

1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Let  $A = \{x : 1 < x < 10, x \text{ is an odd natural number}\}$  and  
 $B = \{y : 90 < y < 100, y \text{ is a prime number}\}$ .

Write the number of relations from  $A$  to  $B$ .

1

ধৰা হ'ল  $A = \{x : 1 < x < 10, x \text{ এটা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যা}\}$  আৰু

$B = \{y : 90 < y < 100, y \text{ এটা মৌলিক সংখ্যা}\}$ ।

$A$  ৰ পৰা  $B$  লৈ হোৱা সম্বন্ধৰ সংখ্যা লিখা।

- (b) Write down the range of  $f(x) = \cot^{-1} x$ .

1

$f(x) = \cot^{-1} x$  ফলনৰ পৰিসৰ লিখা।

- (c) Find all the positive values of  $2 \times 2$  determinants whose entries are from the set  $\{-1, 0, 1\}$ .

1

সংহতি  $\{-1, 0, 1\}$  ৰ মৌল সমূহেৰে গঠিত  $2 \times 2$  সাৰণিকবোৰৰ সকলো ধনাত্মক মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) Let  $A$  be a skew-symmetric matrix of odd order. Write the value of  $|A|$ .

1

ধৰা হ'ল  $A$  এটা অযুগ্ম মাত্ৰাৰ বিঘম সমমিত মৌলকক্ষ।  $|A|$  ৰ মান লিখা।

- (e) Let  $A$  be a matrix of order 3, such that  $|A| = -9$ . Find the value of  $|-3A^{-1}|$ . 1

ধৰা হ'ল  $A$  এটা 3 মাত্ৰাৰ মৌলিকমূৰ্হ য'ত  $|A| = -9$ ।  $|-3A^{-1}|$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (f) If  $2^x = 3^y$ , then find  $\frac{dy}{dx}$ . 1

যদি  $2^x = 3^y$ , তেন্তে  $\frac{dy}{dx}$  নিৰ্ণয় কৰা।

- (g) Evaluate  $\int 2x f'(x^2) dx$ . 1

$\int 2x f'(x^2) dx$  নিৰ্ণয় কৰা।

- (h) Find the order and degree of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0. \quad 1$$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$  অবকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু ঘাত নিৰ্ণয় কৰা।

- (i) Write the interval in which the function  $f(x) = \cos x$  is strictly decreasing. 1

$f(x) = \cos x$  ফলনটো কোনটো অন্তৰালত সতত হ্রাসমান হয় লিখা।

- (j) Write the equation of the plane passing through  $(a, b, c)$  and parallel to  $xy$ -plane. 1

$(a, b, c)$  বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু  $xy$ -সমতলৰ সমান্তৰাল হোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ লিখা।

2. Let the mapping  $f(x) = ax + b$ ,  $a > 0$ , maps  $[-1, 1]$  onto  $[0, 2]$ ; show that  $\cot(\cot^{-1} 7 + \cot^{-1} 8 + \cot^{-1} 18) = f(2)$ . 4

ধৰা হ'ল ফলন  $f(x) = ax + b$ ,  $a > 0$  আৰু  $[-1, 1]$  ৰ আচ্ছাদন প্ৰতিচিত্ৰ হ'ল  $[0, 2]$ ; দেখুওৱা যে,  $\cot(\cot^{-1} 7 + \cot^{-1} 8 + \cot^{-1} 18) = f(2)$ .

**OR / অথবা**

Find the value of

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{3} \sqrt{1-x^2} \right) \right\}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left( x + \sqrt{3} \sqrt{1-x^2} \right) \right\}, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

মান নিৰ্ণয় কৰা।

3. Let  $f : R \rightarrow R$  is defined by  $f(x) = 3x - 2$  and  $g : R \rightarrow R$  is defined by  $g(x) = \frac{x+2}{3}$ .

Show that  $f \cdot g = g \cdot f$ .

4

ধৰা হ'ল  $f : R \rightarrow R$  ক  $f(x) = 3x - 2$  ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে আৰু  $g : R \rightarrow R$  ক

$g(x) = \frac{x+2}{3}$  ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে।

দেখুওৱা যে,  $f \cdot g = g \cdot f$ .

4. Show that

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \quad 4$$

দেখুওৱা যে,

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

**OR** / অথবা

Without expanding show that

$$\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

বিস্তাৰ নকৰাকৈ দেখুওৱা যে,

$$\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

5. Show that the function  $f$  defined by

$$f(x) = |1 - x + |x||, \quad x \in \mathbf{R} \text{ is a continuous function.} \quad 4$$

দেখুওবা যে,  $f(x) = |1 - x + |x||$ ,  $x \in \mathbf{R}$  বে সংজ্ঞাবদ্ধ ফলন  $f$ , এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন।

**OR / অথবা**

Discuss the applicability of Rolle's theorem to the function

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ on } [-2, 2].$$

ফলন  $f(x) = x^2 + 1$ , অন্তৰাল  $[-2, 2]$  ত বলচ্ উপপাদ্যৰ প্ৰয়োগ আলোচনা কৰা।

6. If  $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ , find  $\frac{dy}{dx}$ . 4

যদি  $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ , তেন্তে  $\frac{dy}{dx}$  নিৰ্ণয় কৰা।

7. If  $y = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( \frac{1 - 4x^3}{1 + 4x^3} \right)$ ,  $x \geq 0$ ,

find  $\frac{dy}{dx}$ . 4

যদি  $y = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left( \frac{1 - 4x^3}{1 + 4x^3} \right)$ ,  $x \geq 0$ ,

তেন্তে  $\frac{dy}{dx}$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

**OR / অথবা**

Determine the set of all points where the function  $f(x) = x/|x|$  is differentiable.

ফলন  $f(x) = x/|x|$  অৱকলনীয় হোৱাৰ বিন্দুসমূহৰ সংহতি নিৰ্ধাৰণ কৰা।

8. Evaluate  $\int \frac{1}{x} \left( \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$  4

$\int \frac{1}{x} \left( \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

**OR / অথবা**

Evaluate  $\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x} dx$ .

$\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x} dx$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

9. Evaluate  $\int_0^1 \frac{3-x^2}{(3+x^2)^2} dx$ . 4

$\int_0^1 \frac{3-x^2}{(3+x^2)^2} dx$  ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

**OR / অথবা**

Evaluate  $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} dx$

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} dx$  ৰ মান নির্ণয় কৰা।

10. Solve the differential equation 4

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

অৱকল সমীকৰণ  $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$  সমাধান কৰা।

11. If  $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$ ,

show that  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ . 4

যদি  $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$ ,

দেখুওৱা যে,  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ ।

12. If  $\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$  and  $\vec{b} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$  then determine the vector component of  $\vec{a}$  along  $\vec{b}$ . 4

যদি  $\vec{a} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$  আৰু  $\vec{b} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$  তেন্তে  $\vec{b}$  ৰ দিশত  $\vec{a}$  ৰ ভেক্টৰ উপাংশ নির্ণয় কৰা।



**OR / অথবা**

Find a unit vector perpendicular to each of the vectors  $\vec{a} + \vec{b}$  and  $\vec{a} - \vec{b}$ , where  $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$  and  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ .

$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ,  $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$  তেত্তে  $\vec{a} + \vec{b}$  আৰু  $\vec{a} - \vec{b}$  দুয়োটা ভেক্টৰৰ ওপৰত লম্ব হোৱা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

13. A natural number is selected at random from the set

$A = \{x : 1 \leq x \leq 50\}$ . Find the probability such that the number satisfies the inequation  $x^2 - 13x \leq 30$ . 4

সংহতি  $A = \{x : 1 \leq x \leq 50\}$  ৰ পৰা যাদুশিক ভাবে এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা নিৰ্বাচন কৰা হ'ল। সংখ্যাটোৱে অসমতা সমীকৰণ  $x^2 - 13x \leq 30$  সমাধান কৰাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

14. If  $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ , then

show that  $I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ ,

where  $I$  is the identity matrix of order 2. 6

যদি  $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ , তেন্তে

দেখুওৱা যে,  $I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ ,

য'ত  $I$  এটা ২ মাত্ৰাৰ একক মৌলকম্ফ।

**OR / অথবা**

If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ , then find  $A^{-1}$ ; and hence solve the

system of equations

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x + 3y + 2z &= 2 \\ 3x - 3y - 4z &= 11 \end{aligned}$$

যদি  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ , তেন্তে  $A^{-1}$  নিৰ্ণয় কৰা; আৰু

সমীকৰণ পদ্ধতি

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x + 3y + 2z &= 2 \\ 3x - 3y - 4z &= 11 \end{aligned}$$

সমাধান কৰা।

15. Form the differential equation satisfied by  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ , where  $a$  and  $b$  are arbitrary constants. 6

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  সমীকৰণে সিদ্ধ কৰা অবকলজ সমীকৰণ গঠন কৰা, য'ত  $a$  আৰু  $b$  ঐচ্ছিক ধ্ৰুবক।

**OR / অথবা**

Find the maximum and minimum values of the function  $f(x) = x + \sin 2x$  on  $[0, 2\pi]$ .

$[0, 2\pi]$  অন্তৰালত  $f(x) = x + \sin 2x$  ফলনৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।

16. Prove that the area of a right angled triangle of a given hypotenuse is maximum when the triangle is isosceles. 6

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰদত্ত অতিভুজ বিশিষ্ট এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ কালি সৰ্বোচ্চ হ'ব যেতিয়া ত্ৰিভুজটো সমদ্বিবাহু হ'ব।

**OR / অথবা**

Find the area of the smaller portion enclosed by the curves  $x^2 + y^2 = 9$  and  $y^2 = 8x$ .

$x^2 + y^2 = 9$  আৰু  $y^2 = 8x$  বক্ৰই আগুৰা সৰু অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

17. Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\text{and } \vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu (3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}). \quad 6$$

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$  আৰু  $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu (3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$  ৰেখা দুডালৰ মাজৰ সৰ্বনিম্ন দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

**OR / অথবা**

Find the equations of two lines through the origin which intersect

$$\text{the line } \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \text{ at } \frac{\pi}{3}.$$

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে পাৰ্শ্বত যোৱা  $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$  ৰেখাডালক  $\frac{\pi}{3}$  কোণত ছেদ কৰা ৰেখা

দুডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

18. Prove that  $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$ . Hence find the area of the parallelogram whose diagonals are the vectors

$$3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \text{ and } \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}. \quad 6$$

প্রমাণ কৰা যে  $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$ । এতেকে ভেক্টৰ  $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$  আৰু  $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$  কৰ্ণ বিশিষ্ট সমান্তৰিকৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

**OR / অথবা**

Find the vector equation of the line passing through  $(1, 2, 3)$  and parallel to the planes  $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$  and  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ .

$(1, 2, 3)$  বিন্দুৰ মাজেৰে পাৰহৈ যোৱা আৰু  $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$  আৰু  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$  সমতলৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

19. Solve the linear programming problem graphically.

6

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ বৈখিক প্ৰোগ্ৰামিং সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা।

Maximize  $z = 20x + 15y$ , subject to the conditions

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 200, \\ x + y &\leq 150 \quad \text{and} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

$z = 20x + 15y$  ৰ সৰ্ব্বোচ্চ মান উলিওৱা

য'ত,

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 200, \\ x + y &\leq 150 \quad \text{আৰু} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad | \end{aligned}$$

**OR / অথবা**

Maximize and minimize

$z = 5x + 2y$ , subject to the conditions,

$$x - 2y \leq 2,$$

$$3x + 2y \leq 12,$$

$$-3x + 2y \leq 3 \quad \text{and} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$z = 5x + 2y$  ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা

য'ত

$$x - 2y \leq 2,$$

$$3x + 2y \leq 12,$$

$$-3x + 2y \leq 3 \quad \text{আৰু} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad |$$

20. Two numbers are selected at random from a set of first 90 natural numbers. Find the probability that the product of randomly selected numbers is divisible by 3. 6

প্রথম 90টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা 2টা সংখ্যা যাদৃশিকভাৱে নিৰ্বাচন কৰা হ'ল। যাদৃশিকভাৱে নিৰ্বাচন কৰা সংখ্যা দুটাৰ গুণফল 3ৰে বিভাজ্য হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

**OR / অথবা**

In a  $3 \times 3$  matrix, entries  $a_{ij}$  are selected randomly from the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 with replacement where each element  $a_{ij}$  is a three digit number. Find the probability that each element in each row is divisible by 15.

এটা  $3 \times 3$  মাত্রাৰ মৌলকম্ৰ মৌলসমূহ  $a_{ij}$  ক অংক  $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  ৰ পৰা পুনৰস্থাপিত হিচাবত যাদৃশিকভাৱে নিৰ্বাচন কৰা হৈছে, য'ত প্ৰত্যেক  $a_{ij}$  এটা তিনিটা অংক বিশিষ্ট সংখ্যা। প্ৰত্যেক শাৰীৰ প্ৰত্যেক মৌল  $15$ ৰে বিভাজ্য হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

————— × —————

