

MATHEMATICS

(गणित)

(311)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे]

[पूर्णांक : 100

- Note :** (1) This question paper consists of **four Sections A, B, C and D** containing **33** questions.
- (2) Question Number **1 to 10** in **Section A** are multiple choice questions (MCQ). Each question carries **one mark**. In each question there are four choices (A), (B), (C) and (D) of which only one is correct. You have to select the correct choice and indicate it in your answer book by writing (A), (B), (C) or (D) as the case may be. No separate time is allotted for attempting MCQ.
- (3) Question Number **11 to 16** in **Section B** are very short answer questions and carry **2 marks** each.
- (4) Question Number **17 to 28** in **Section C** are short answer questions and carry **4 marks** each.
- (5) Question Number **29 to 33** in **Section D** are long answer questions and carry **6 marks** each.
- (6) All questions are **compulsory**. There is no overall choice, however, alternative choices are given in some questions. In such questions, you have to attempt only one choice.

- निर्देश :** (1) इस प्रश्न पत्र में कुल 33 प्रश्न हैं, जो चार खण्डों अ, ब, स तथा द में विभाजित हैं।
- (2) खण्ड-अ में प्रश्न संख्या 1 से 10 तक तथा बहुविकल्पीय प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के लिए 1 अंक निर्धारित है। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के रूप में (A), (B), (C) तथा (D) चार विकल्प दिए गए हैं जिन में से कोई एक सही है। आपको सही विकल्प चुनना है तथा अपनी पुस्तिका में (A), (B), (C) तथा (D) में जो सही हो उत्तर के रूप में लिखना है। बहुविकल्पीय प्रश्न हल करने के लिए अलग से समय नहीं दिया गया है।
- (3) खण्ड - ब में प्रश्न संख्या 11 से 16 तक अति लघुउत्तरीय प्रश्न है तथा प्रत्येक के 2 अंक निर्धारित हैं।
- (4) खण्ड - स में प्रश्न संख्या 17 से 28 तक लघुउत्तरीय प्रश्न है तथा प्रत्येक के 4 अंक निर्धारित हैं।
- (5) खण्ड - द में प्रश्न संख्या 29 से 33 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न है तथा प्रत्येक के 6 अंक निर्धारित हैं।
- (6) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। पूर्ण प्रश्नपत्र में विकल्प नहीं हैं, फिर भी कुछ प्रश्नों में, आंतरिक विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।



SECTION-A

खण्ड-अ

1. Let $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ be defined by $f(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{N}$. Then f is [1]

- (A) one to one but not onto
- (B) onto but not one to one
- (C) neither one to one nor onto
- (D) one to one and onto

माना $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ पर $f(x) = 2x + 3, x \in \mathbb{N}$ द्वारा परिभाषित एक फलन है। तो f एक

- (A) एकैकी परन्तु आछादक नहीं, फलन है
- (B) आछादक परन्तु एकैकी नहीं, फलन है
- (C) न तो एकैकी और न ही आछादक, फलन है
- (D) एकैकी और आछादक, फलन है

2. $\int \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2} \right] dx$ is equal to [1]

- (A) $\frac{x}{\log x} + c$
- (B) $\frac{2x}{\log x} + c$
- (C) $\frac{x}{2\log x} + c$
- (D) $\frac{1}{\log x} + c$



$\int \left[\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2} \right] dx$ बराबर है :

(A) $\frac{x}{\log x} + c$

(B) $\frac{2x}{\log x} + c$

(C) $\frac{x}{2\log x} + c$

(D) $\frac{1}{\log x} + c$

3. General solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = 4 \tan y$ is equal to [1]

(A) $\sin y = ce^x$

(B) $y = \sin^{-1}(ce^{4x})$

(C) $y = \cos^{-1}(ce^{4x})$

(D) $y = \sin^{-1}(ce^{-4x})$

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 4 \tan y$ का व्यापक हल है :

(A) $\sin y = ce^x$

(B) $y = \sin^{-1}(ce^{4x})$

(C) $y = \cos^{-1}(ce^{4x})$

(D) $y = \sin^{-1}(ce^{-4x})$

4. The value of x for which $f(x) = |x - 1|$ is not differentiable, is: [1]

(A) -1

(B) 2

(C) 0

(D) 1

x का वह मान, जिसके लिए $f(x) = |x - 1|$ द्वारा परिभाषित फलन अवकलनीय नहीं है, है :

(A) -1

(B) 2

(C) 0

(D) 1



5. Distance between planes $x + 2y - 3z = 10$ and $2x + 4y - 6z = -4$ is [1]

(A) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ (B) 7

(C) $\frac{\sqrt{14}}{12}$ (D) $\frac{12}{\sqrt{14}}$

तलों $x + 2y - 3z = 10$ तथा $2x + 4y - 6z = -4$ के बीच की दूरी है :

(A) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ (B) 7

(C) $\frac{\sqrt{14}}{12}$ (D) $\frac{12}{\sqrt{14}}$

6. If $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, then A is equal to [1]

(A) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

यदि $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ है, तो A बराबर है :

(A) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

7. $\cos(\tan^{-1} x)$ is equal to

[1]

(A) $\frac{1}{x^2 + 1}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(C) $\frac{1}{x^2 - 1}$

(D) $\sqrt{x^2 - 1}$

$\cos(\tan^{-1} x)$ बराबर है :

(A) $\frac{1}{x^2 + 1}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(C) $\frac{1}{x^2 - 1}$

(D) $\sqrt{x^2 - 1}$

8. $\int_2^3 \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3}} dx$ is equal to

[1]

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 0

(C) -1

(D) $\frac{\pi}{4}$

$\int_2^3 \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3}} dx$ बराबर है :

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 0

(C) -1

(D) $\frac{\pi}{4}$



9. If $y = x^{\tan x}$, then $\frac{dy}{dx}$ is equal to

[1]

(A) $y \frac{\tan x - x(\log x) \sec^2 x}{x}$

(B) $y \frac{\tan x + x(\log x) \sec^2 x}{x}$

(C) $\frac{(\tan x - \sec^2 x)}{x}$

(D) $\frac{(x \tan x + \sec^2 x)}{x}$

यदि $y = x^{\tan x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है :

(A) $y \frac{\tan x - x(\log x) \sec^2 x}{x}$

(B) $y \frac{\tan x + x(\log x) \sec^2 x}{x}$

(C) $\frac{(\tan x - \sec^2 x)}{x}$

(D) $\frac{(x \tan x + \sec^2 x)}{x}$

10. Which of the following statement is true?

[1]

(A) Chord of a circle is double of its radius

(B) Concentric circles have different radius

(C) If a number has more than two factors then it is not composite

(D) 25 is a multiple of 8.

निम्न में से कौनसा कथन सही है?

(A) एक वृत्त की जीवा उसके अर्ध-व्यास से दुगनी होती है।

(B) एक ही केन्द्र वाले वृत्तों का अर्ध-व्यास भिन्न होते हैं।

(C) यदि किसी एक संख्या के गुणखंड दो से अधिक हैं, तो वह संख्या भाज्य नहीं है।

(D) 25, 8 का गुणज है।



SECTION-B

खण्ड - ब

11. Let R be a relation defined on the set of natural numbers \mathbb{N} as follows $R = \{(x, y) : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \text{ and } 3x - y = 12\}$. Find the domain and range of the relation R. [2]

प्राकृत संख्याओं के समुच्चय \mathbb{N} पर, सम्बन्ध R निम्न द्वारा परिभाषित है :

$R = \{(x, y) : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \text{ और } 3x - y = 12\}$ सम्बन्ध R का प्रान्त व परिसर ज्ञात कीजिए।

12. Find the derivative of $\sin x^3$ with respect to x^2 . [2]

$\sin x^3$ का, x^2 के सापेक्ष, अवकलज ज्ञात कीजिए।

13. Write the converse the following statements : [2]

- a) If game is cancelled, then team A is win.
b) If a is a multiple of b then b is a factor of a .

निम्न कथनों के विलोम लिखिए :

- a) यदि खेल रद्द होता है, तो टीम A जीतती है।
b) यदि a, b का गुणज है, तो b, a का गुणनखंड है।

14. If $A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 43 \\ 7 & 0 & -47 \\ -43 & 47 & 0 \end{pmatrix}$, then show that $|A| = 0$. [2]

यदि $A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 43 \\ 7 & 0 & -47 \\ -43 & 47 & 0 \end{pmatrix}$ है, तो दर्शाइए कि $|A| = 0$

OR/अथवा

For $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, verify that $|A^2| = (|A|)^2$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि $|A^2| = (|A|)^2$

15. Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$. [2]

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

16. If $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ represent two adjacent sides of a triangle, then find the angle between them. [2]

यदि एक त्रिभुज की दो संलग्न भुजाएँ $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ द्वारा निरूपित हो तो, इन भुजाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।



SECTION - C

खण्ड - स

17. I_3 is an identity matrix of order 3 and $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. Show that $A^2 = I_3$ and hence find A^{-1} and $(A^2)^{-1}$. [4]

कोटि 3 का एक इकाई आव्यूह I_3 तथा $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^2 = I_3$ तथा A^{-1} और $(A^2)^{-1}$ भी ज्ञात कीजिए।

18. Determine the values of a, b for which the function [4]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} - a, & x < -2, \\ a+b, & x = -2, \\ 2x+b, & x > -2 \end{cases}$$

is continuous at $x = -2$.

a और b के वे मान ज्ञात कीजिए, जिनके लिए फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} - a, & x < -2, \\ a+b, & x = -2, \\ 2x+b, & x > -2 \end{cases}$$

$x = -2$ पर सतत है।



19. The perimeter of a triangle is 16cm. If one side is 6cm, find the other two sides so that the area of the triangle is maximum. [4]

एक त्रिभुज का परिमाण 16 सेमी है। यदि एक भुजा 6 सेमी लम्बी हो, तो बाकी दो भुजाओं की लम्बाईयाँ ज्ञात कीजिए, जिससे त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम हो।

20. Evaluate : $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$. [4]

$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

21. Find the equation of the line passing through the point $(-1, -3, -2)$ and perpendicular to the lines $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ and $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{5}$. [4]

बिन्दु $(-1, -3, -2)$ से गुजरने वाली और रेखाओं $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ तथा $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{5}$ के लम्बवत् रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

22. Let \mathbb{R}^+ be the set of all positive real numbers and $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [2, \infty)$ be a function such that $f(x) = x^2 + 2$. Show that inverse of f exists and also find f^{-1} . [4]

माना धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय \mathbb{R}^+ है और $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [2, \infty)$ पर $f(x) = x^2 + 2$ द्वारा परिभाषित फलन है। दर्शाइए कि फलन f के प्रतिलोम का अस्तित्व है और f^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

23. Show that $\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3$. [4]

दर्शाइए कि $\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3$

24. Solve the following equation for $x(x > 0)$: $\sin^{-1}\left(\frac{6}{x}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{8}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ [4]

$x(x > 0)$ के लिए निम्न समीकरण को हल कीजिए : $\sin^{-1}\left(\frac{6}{x}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{8}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

25. Find the interval in which the function $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 20$ are increasing or decreasing. [4]

वे अंतराल ज्ञात कीजिए, जिन पर फलन $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 20$ वर्धमान या हासमान है।

OR/अथवा

Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = e^x \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.

फलन $f(x) = e^x \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ के लिए रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए।



26. Find : $\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$.

[4]

$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx$ ज्ञात कीजिए।

OR/अथवा

Find : $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$.

$\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$ ज्ञात कीजिए।

27. Solve the following differential equation :

[4]

$$x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \sin x + \cos x) = 1$$

अवकल समीकरण $x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \sin x + \cos x) = 1$ को हल कीजिए।

OR/अथवा

Solve the differential equation : $(x + 2) \frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 5$.

अवकल समीकरण $(x + 2) \frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 5$ को हल कीजिए।



28. Find the distance of the point (1, 2, 3) from the plane $x - y + z = 5$ measured parallel to the line $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$. [4]

रेखा $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{4}$ के समान्तर, बिन्दु (1, 2, 3) से तल $x - y + z = 5$ की दूरी ज्ञात कीजिए।

SECTION-D

खण्ड -द

29. Find the equation of the normals to the curve $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ at the points where tangent are parallel to the y-axis. [6]

वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ के उन बिन्दुओं, जिन पर वक्र पर डाली गई स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है, पर अभिलंबों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

30. Find the image of the point (1, 3, 4) on the plane $2x - y + z = 9$. [6]

तल $2x - y + z = 9$ में बिन्दु (1, 3, 4) का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

31. A manufacturer makes red and blue pen. He works at least 10 hours per day. A red pen takes twice as much as time as to make a blue pen. A blue pen takes 20 minutes time to make. A red pen sells for ₹8 and at most 50 can be sold in a day. A blue pen sells for ₹5 and at most 50 can be sold in a day. The manufacturer desires to maximize his revenue. Formulate the above problem as a L.P.P. and solve it graphically. [6]

एक निर्माता लाल तथा नीले पैन बनाता है। वह प्रतिदिन कम से कम 10 घंटे काम करता है। एक लाल पैन बनाने में, एक नीले पैन को बनाने में लगने वाले समय से दुगना समय लगता है। एक नीले पैन को बनाने में 20 मिनट लगते हैं। एक लाल पैन को ₹8 में बेचा जाता है और एक दिन में अधिकतम 50 नग बेचे जा सकते हैं। एक नीला पैन ₹5 में बेचा जाता है और एक दिन में अधिकतम 50 नग बेचे जा सकते हैं। निर्माता अधिकतम राजस्व अर्जित करना चाहता है। इस समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाइए और आलेखीय विधि से हल कीजिए।



32. Find the smaller area enclosed by the circle $x^2 + y^2 = 4$ and the line $x + y = 2$. [6]

वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ तथा रेखा $x + y = 2$ द्वारा घिरे छोटे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

OR/अथवा

Find the derivative of $\tan\sqrt{x}$ from first principle.

$\tan\sqrt{x}$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलन ज्ञात कीजिए।

33. Solve the following system of linear equations, using matrix method : [6]

$$3x + y + z = 1$$

$$2x + 2z = 0$$

$$5x - y + 2z = 4$$

आव्यूह विधि से, निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$3x + y + z = 1$$

$$2x + 2z = 0$$

$$5x - y + 2z = 4$$

OR/अथवा



Using elementary row operations, find the inverse of the following matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

प्रारम्भिक पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग करके, निम्न आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

