प्रतिदर्श प्रश्नपत्र–2019

इण्टरमीडिएट गणित–(केवल प्रश्नपत्र)

समय : 3 घण्टे 15 मिनट **पूर्णांक : 100**

निर्देशः प्रारम्भ के पन्द्रह मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

नोट– (i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
(ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं।
(iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
(v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
(vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

1– सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए–

(क) मान लीजिए कि $f(x)=3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f:R\to R$ है। सही उत्तर चुनिए– 1

(i) f एकैकी आच्छादक है।

(ii) f बहुएक आच्छादक है।

(iii) f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है।

(iv) f न तो एकैकी है और न आच्छादक है।

(ख) यदि समुच्चय N में $R=\{(a,b):a=b-2, b>6\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R है। निम्न में से सही उत्तर चुनिए– 1

(i) $(2,4)\in R$ (ii) $(3,8)\in R$

(iii) $(6,8)\in R$ (iv) $(8,7)\in R$

(ग) समाकलन $\int xc^x dx$ का मान ज्ञात कीजिए– 1

(i) e^x (ii) $(x+1)e^x$

(iii) $(x-1)e^x$ (iv) $\frac{x^2}{2}e^x$

(घ) अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+y=0$ की कोटि है– 1

(i) 2 (ii) 1

(iii) 0 (iv) परिभाषित नहीं है।

(ङ) यदि सदिश $2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ और $\hat{i}-4\hat{j}+\lambda\hat{k}$ परस्पर लम्ब हैं तो λ का मान ज्ञात कीजिए– 1

(i) 3 (ii) 2

(iii) 4 (iv) 0

2. सभी खण्ड कीजिए–

(क) $Cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 1

(ख) दिखाइए कि फलन $f(x)=|x|, x=0$ पर संतत है। 1

(ग) अवकल समीकरण $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$ की कोटि एवं घात बताइए। 1

(घ) निम्न अवरोधों $x+y\le 4, x\ge 0, y\ge 0$ के अन्तर्गत

z = 3x + 4y का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 1

(ङ) यदि $P(A)=\frac{7}{13}, P(B)=\frac{9}{13}$ और $P(A\cap B)=\frac{4}{13}$ तो P(A/B) का मान ज्ञात कीजिए। 1

3. सभी खण्ड कीजिए–

(क) यदि $f(x)=|x|$ तथा $g(x)=|5x-2|$ है तो gof तथा fog का मान ज्ञात कीजिए। 2

(ख) यदि y = A Sinx + B Cos x है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ है। 2

(ग) सदिशों $\hat{i}-2j+3\hat{k}$ और $3i-2j+\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 2

(घ) गणित के एक प्रश्न पत्र को तीन विद्यार्थी A,B,C को हल करने के लिए दिया जाता है जिनके द्वारा किये जाने की संभावनाएं $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ हैं तो प्रश्न को हल किये जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

4. सभी खण्ड कीजिए–

(क) फलन $f(x)=x^2+2x-8, \quad x\in[-4,2]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 2

(ख) सदिश $(\bar{a}+\bar{b})$ और $(\bar{a}-\bar{b})$ में से प्रत्येक के लम्बवत् मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $\bar{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}, \bar{b}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ है।

2

(ग) उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी संलग्न भुजाएँ $\bar{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ और $\bar{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा दी गयी है। 2

(घ) A और B ऐसी घटनाएँ दी गई हैं जहाँ $P(A)=\frac{1}{2}, P(AUB)=\frac{3}{5}$ तथा $P(B)=P, P$ का मान ज्ञात कीजिए यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं। 2

5. किन्हीं पाँच खण्ड को हल कीजिए।

(क) सिद्ध कीजिए $Sin^{-1}\frac{3}{5}-Sin^{-1}\frac{8}{17}=Cos^{-1}\frac{84}{85}$ 5

(ख) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}=4abc$ 5

(ग) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} Sin^2 x dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 5

(घ) रेखाओं $\bar{r}=\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ और $\bar{r}=3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(ङ) सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त पृष्ठ एवं महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई, आधार के व्यास के बराबर होती है। 5

(च) $(Sin\, x)^{Cos\, x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। 5

6. किन्हीं पाँच खण्ड को हल कीजिए–

(क) दिखाइए कि $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ 5

$x = 0$ पर असंतत है।

(ख) दो परवलयों $y = x^2$ और $y^2 = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

(ग) समतलों $\bar{r}.(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ और $\bar{r}.(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$ के प्रतिच्छेदन तथा बिन्दु (1, 1, 1) से जाने वाले समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

(घ) निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत z = 3x + 2y का न्यूनतमीकरण कीजिए – 5

$x+y\geq 8$, $3x+5y\leq 15$, $x\geq 0$, $y\geq 0$

(ङ) वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ पर वे x-अक्ष के समान्तर हैं। 5

(च) एक छात्रावास में 60% विद्यार्थी हिंदी के, 40% अंग्रेजी के और 20% दोनों अखबार पढ़ते हैं।

(i) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिंदी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ते है। $2\frac{1}{2}$

(ii) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ते हैं तो उनके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। $2\frac{1}{2}$

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए–

(क) यदि $A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$,

हो तो $(AB)^{-1}$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

(ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए–

(क) परवलय $y^2 = 4ax$ और उसके नाभिलम्ब से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 8

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - y = Cos\, x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए–

(क) $\int_0^{\pi/2} \log \sin x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

(ख) $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ का मान ज्ञात कीजिए। 8