131

324 (EO)

2019

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] *[पूर्णांक : 100*

निर्देश :

(i) प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

(ii) इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।

(iii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(iv) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड करने हैं ।

(v) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।

(vi) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।

(vii) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।

Scanned with CamScanner

1. निम्नलिखित के सभी खण्ड हल कीजिए :

(क) मान लीजिए कि $f(x) = 3x$ द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ है । तब f 1

(i) एकैकी आच्छादक है

(ii) बहुएक आच्छादक है

(iii) एकैकी है परंतु आच्छादक नहीं है

(iv) न तो एकैकी है और न आच्छादक है

(ख) समाकलन $\int e^x \sec x \, (1 + \tan x) \, dx$ बराबर है 1

(i) $e^x \cos x + c$ (ii) $e^x \sec x + c$

(iii) $e^x \sin x + c$ (iv) $e^x \tan x + c$

(ग) अवकल समीकरण $2x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3 \dfrac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है 1

(i) 2 (ii) 1

(iii) 0 (iv) परिभाषित नहीं है

(घ) $\hat{i} . (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} . (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} . (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है 1

(i) 0 (ii) -1

(iii) 1 (iv) 3

Scanned with CamScanner

(ङ) वक्र $y = 2x^2 + 3 \sin x$ के $x = 0$ पर अभिलम्ब की प्रवणता है *1*

(i) 3 (ii) $\frac{1}{3}$

(iii) -3 (iv) $-\frac{1}{3}$

2. निम्नलिखित के *सभी* खण्ड हल कीजिए :

(क) $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। *1*

(ख) दिखाइए कि फलन $f(x) = 2x + 3$, $x = 1$ पर संतत है। *1*

(ग) यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि $P(E) = 0{\cdot}6$, $P(F) = 0{\cdot}3$ और $P(E \cap F) = 0{\cdot}2$, तो $P(E/F)$ और $P(F/E)$ ज्ञात कीजिए। *1*

(घ) $\int \log x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। *1*

(ङ) यदि एक रेखा X, Y तथा Z अक्षों की घनात्मक दिशा के साथ क्रमशः $90°$, $60°$ तथा $30°$ का कोण बनाती है, तो रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए। *1*

Scanned with CamScanner

3. निम्नलिखित के *सभी* खण्ड हल कीजिए :

(क) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $A(1, 1, 2)$, $B(2, 3, 5)$ और $C(1, 5, 5)$ हैं । 2

(ख) वक्रों के कुल $y = e^x (a \cos x + b \sin x)$, जिसमें a और b स्वेच्छ अचर हैं, को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण को ज्ञात कीजिए । 2

(ग) समाकल $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ को ज्ञात कीजिए । 2

(घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं । यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम-से-कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है ? 2

4. निम्नलिखित के *सभी* खण्ड हल कीजिए :

(क) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{a} + \lambda \vec{b}$, $\vec{c}$ पर लम्ब है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए । 2

(ख) $(\sin x)^{\cos x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए । 2

(ग) यदि किसी लीप वर्ष को यादृच्छया चुन लिया जाए, तो उस वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 2

(घ) दर्शाइए कि बिन्दु $A(-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$, $B(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ और $C(7\hat{i} - \hat{k})$ संरेख हैं । 2

Scanned with CamScanner

5. निम्नलिखित में से किन्हीं *पाँच* खण्डों को हल कीजिए :

(क) सिद्ध कीजिए कि 5

$$\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि 5

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx=\frac{\pi}{4}$$

(ग) सिद्ध कीजिए कि 5

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3$$

(घ) रेखाओं $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ और $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 5

(ङ) आलेखीय विधि द्वारा निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या को हल कीजिए :

निम्नलिखित व्यवरोधों के अन्तर्गत

$x+y\le 50$ ..... (1)

$3x+y\le 90$ ..... (2)

$x\ge 0, y\ge 0$ ..... (3)

$z=4x+y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए । 5

(च) फलन $f(x)=x^2+2$, जहाँ $x\in[-2, 2]$ के लिए रोले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए । 5

P.T.O.

Scanned with CamScanner

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

(क) वक्रों $y = x$ एवं $y = x^2$ के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 5

(ग) प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y + \frac{2}{x-3} = 0$ को स्पर्श करती है । 5

(घ) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, तो

AB तथा BA ज्ञात कीजिए । क्या $AB = BA$ होगा ? 5

(ङ) उस समतल का सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (5, 2, – 4) से होकर जाता है और 2, 3, – 1 दिक्-अनुपात वाली रेखा पर लंब है । 5

(च) एक पाँसे को पाँच बार यादृच्छया फेंका जाता है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि 5

(i) कोई एक निश्चित अंक चार बार ऊपर आता है ।

(ii) कोई एक निश्चित अंक कम-से-कम चार बार ऊपर आता है ।

7. निम्नलिखित में से किसी *एक* खण्ड को हल कीजिए :

(क) निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय

$$2x + 3y + 10z = 4$$
$$4x - 6y + 5z = 1$$
$$6x + 9y - 20z = 2$$

को आव्यूह विधि द्वारा हल कीजिए । 8

(ख) (i) एक थैले में 4 सफेद और 3 काली गेंदें हैं । यदि ये एक-एक करके बिना दुबारा डाले निकाली जाएँ, तो पहली गेंद के सफेद, दूसरी के काली, तीसरी के सफेद, चौथी के काली, पाँचवीं के सफेद, छठवीं के काली और सातवीं के सफेद होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 4

(ii) यदि X वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तो सिद्ध कीजिए कि सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a \in X, b \in X$ तथा $a = b\}$ एक तुल्यता सम्बन्ध है । 4

8. निम्नलिखित में से किसी *एक* खण्ड को हल कीजिए :

(क) अवकल समीकरण

$(3xy + y^2)\, dx + (x^2 + xy)\, dy = 0$ को हल कीजिए । 8

(ख) समाकल

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x + \cos x}\, dx$$ का मान ज्ञात कीजिए । 8

Scanned with CamScanner

9. निम्नलिखित में से किसी ***एक*** **खण्ड** को हल कीजिए :

(क) एक कण पर तीन बल, जिनके परिमाण 5, 3, 1 न्यूटन हैं, सदिशों (6, 2, 3), (3, – 2, 6), (2, – 3, – 6) की दिशा में क्रमशः कार्य कर रहे हैं । यह बल कण को बिन्दु A (2, – 1, – 3) से बिन्दु B (5, – 1, 1) तक विस्थापित करते हैं तथा स्थिर रहते हैं । यदि लम्बाई की इकाई मीटर है, तो बलों के द्वारा किए गए कुल कार्य की गणना कीजिए । 8

(ख) (i) अवकल समीकरण

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} - x = 2\tan^{-1}x$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए । 4

(ii) निम्नलिखित व्यवरोधों

$5x + y \leq 100$

$x + y \leq 60$

$x \geq 0, y \geq 0$ के अन्तर्गत

$z = 250x + 75y$ का अधिकतमीकरण कीजिए । 4

Scanned with CamScanner