अनुक्रमांक

नाम ...

131

324(EJ)

2019

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश :
- i) इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
- ii) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
- iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
- v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
- vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :
- i) There are in all *nine* questions in this question paper.
- ii) *All* questions are compulsory.
- iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- iv) Marks allotted to questions are indicated against the question.
- v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) समुच्चय $A \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ में $R \{ (a, b) : a$ तथा b दोनों ही या तो सम हैं या विषम हैं }

तो निम्न में से सही सम्बन्ध चयन कीजिए :

i) सम्बन्धहीन ii) तुच्छ

iii) स्वतुल्यता iv) सममित नहीं। 1

ख) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x \quad \forall x \in R$ द्वारा प्रदत्त फलन $f: R \rightarrow R$ आच्छादक है। 1

ग) $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$ का समाकलन कीजिए। 1

घ) सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

ङ) अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

की घात क्या है ? 1

1. Attempt *all* the parts of the following :

a) Write the correct option from the following if

$R \{ (a, b) : a$ and b both are either even or odd $\}$ in the set

$A \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$:

i) No relation

ii) Trivial

iii) Equivalence relation

iv) Not symmetric. 1

b) Prove that the function $f: R \rightarrow R$ defined on $f(x) = 2x \ \forall x \in R$ is onto. 1

c) Evaluate $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$. 1

d) Find the angle between the vectors

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$. 1

e) Find the degree of the differential equation :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x, x \in [-1, 1]$. 1

ख) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: R \rightarrow R$ न तो एकैकी है और न आच्छादक है। 1

ग) निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से किस समीकरण का व्यापक हल $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ है ?

i) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$. (1) 1

घ) जाँच कीजिए कि फलन $f(x) = x^2$, $x = 0$ पर संतत है। (1) 1

ङ) A और B दो घटनाएँ हैं कि $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$ तब निम्न से घटनाओं के बारे में सही चयन कीजिए : (1)

i) $A \subset B$ ii) $A = B$

iii) $A \cap B = \phi$ iv) $P(A) = P(B)$. 1

2. Attempt *all* the parts of the following :

a) Prove that

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x, x \in [-1, 1]$. 1

b) Prove that the function $f : R \to R$ defined on $f(x) = x^2$ is neither one-one nor onto. 1

c) Which of the following differential equations has $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$, a general solution ?

i) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$. 1

d) Examine that the function $f(x) = x^2$ is continuous at $x = 0$. 1

e) A and B are two events such that $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$. Write the correct option from the following :

i) $A \subset B$ ii) $A = B$

iii) $A \cap B = \phi$ iv) $P(A) = P(B)$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों का हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि यदि $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ एकैकी है, तो $gof : A \to C$ भी एकैकी है। 2

ख) यदि $y = \sin^{-1} x$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx}.$$ 2

ग) यदि सदिश $a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और सदिश $3\hat{i} + b\hat{j}$ लम्बवत हों तो सिद्ध करें कि $3a + 2b = 0.$ 2

घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़की हो तो दोनों बच्चों के लड़की होने की क्या प्रायिकता है ? 2

3. Attempt *all* the parts of the following :

a) Prove that if $f : A \to B$ and $g : B \to C$ are one-one, then $g o f : A \to C$ is also one-one. 2

b) Prove that $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx}$ if

$y = \sin^{-1} x$. 2

c) If vectors $a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + b\hat{j}$ are perpendicular then prove that $3a + 2b = 0.$ 2

d) There are two children in a family. If it is known that at least a child is a girl then what is the probability that both the children are girls ? 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि E और F इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि $P(E) = 0{\cdot}6$, $P(F) = 0{\cdot}3$ और $P(E \cap F) = 0{\cdot}2$, तो $P(E/F)$ तथा $P(F/E)$ के मान ज्ञात कीजिए। 2

ख) दिखाएं कि दो सदिशों $\bar{a}$ तथा $\bar{b}$ के लिए सदैव $|\vec{a} + \bar{b}| < |\bar{a}| + |\bar{b}|$ होते हैं। 2

ग) दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लम्ब हैं। 2

घ) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2

4. Attempt *all* the parts of the following :

a) If E and F are two events such that $P(E) = 0{\cdot}6$, $P(F) = 0{\cdot}3$ and $P(E \cap F) = 0{\cdot}2$, find the values of $P(E/F)$ and $P(F/E)$. 2

b) Show that $|\overline{a}+\overline{b}|<|\overline{a}|+|\overline{b}|$ is always true for any two vectors $\overline{a}$ and $\overline{b}$. 2

c) Show that the lines

$$\frac{x-5}{7}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z}{1} \quad \text{and} \quad \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

are orthogonal to each other. 2

d) Evaluate : $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)}\,dx$. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) मान ज्ञात कीजिए $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$. 5

ख) दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

5

ग) उस समतल का सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (5, 2, − 4) से जाता है तथा (2, 3, − 1) दिक्-कोज्या वाली रेखा पर लम्ब है। 5

घ) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त $x^2+y^2=32$, रेखा $y=x$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

ङ) सिद्ध कीजिए

$$2\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}.$$ 5

च) आलेखीय विधि से $Z = 3x + 9y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, जिसके अवरोध निम्नवत हैं :

$$x+3y \le 60$$
$$x+y \ge 10$$
$$x \le y, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$ 5

5. Attempt any *five* parts of the following :

a) Evaluate $\int \frac{dx}{1-\cos x-\sin x}$. 5

b) Show that

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

5

c) Find the vector and Cartesian equation of a plane which passes through point (5, 2, − 4) and is perpendicular to the line having (2, 3, − 1) its direction cosines. 5

d) Find the area of the region enclosed in first quadrant by the circle $x^2 + y^2 = 32$, line $y = x$ and x-axis. 5

e) Prove that

$$2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}.$$ 5

f) Find the minimum value of $Z = 3x + 9y$ graphically of a problem satisfying the following constraint equations :

$$x + 3y \le 60$$
$$x + y \ge 10$$
$$x \le y, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$ 5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित फलन के सांतत्य और अवकलनीयता का $x = 1$ पर विचार कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{यदि } x \le 1 \\ x - 2 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$ 5

ख) x के सापेक्ष अवकलन कीजिए

$$e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x.$$ 5

ग) एक स्थिर तालाब में एक पत्थर डाला जाता है और उत्पन्न तरंगें वृत्त में 4 cm/sec की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंगों की त्रिज्या 10 cm है, तो उस क्षण घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है ? 5

घ) अवकल समीकरण

$xy\frac{dy}{dx} = (x + 2)(y + 2)$ के लिए बिन्दु $(1, -1)$ से गुजरने वाली वक्र ज्ञात कीजिए। 5

ङ) रेखा $y = 3x + 2$, x-अक्ष एवं कोटियाँ $x = -1$ एवं $x = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

च) एक रोगी डाक्टर से मिलने ट्रेन, बस, स्कूटर या अन्य किसी वाहन से जाता है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ या $\frac{2}{5}$ हैं। यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ या $\frac{1}{12}$ हैं परन्तु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया तो उसके ट्रेन से आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

6. Attempt any *five* parts of the following :

a) Discuss the continuity and differentiability of

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{if } x \le 1 \\ x - 2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

at $x = 1$. 5

b) Differentiate :

$e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x + x^x$ with respect to x. 5

c) A stone is dropped in a calm and quiet pond. The generated waves move in a circular form with 4 cm/sec speed. Find out with what speed the area covered by the waves is increasing when the radius of the travelling circular waves is 10 cm. 5

d) Find the curve passing through the point (1, − 1) having its differential equation

$$xy \frac{dy}{dx} = (x - 2)(y + 2).$$ 5

e) Find the area enclosed by the lines $y = 3x + 2$, x-axis, and ordinates $x = -1$ and $x = 1$. 5

f) A patient is travelling to a doctor by train, bus, scooter or any other means of transport whose probabilities are $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ or $\frac{2}{5}$ respectively. If he travels by train, bus or scooter he reaches late and their probabilities are $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ or $\frac{1}{12}$ respectively. He reaches on time if he travels by any other means of transport. If he reached late, find the probability of his coming by train. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) निम्न समीकरणों को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$
$$2x + y - z = 1.$$ 8

ख) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। 8

7. Attempt any *one* part of the following :

a) Solve the following equations :

$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$
$$2x + y - z = 1$$

by matrix method. 8

b) Find A^{-1} if matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$ 8

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरा हुआ है। 8

ख) रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

8. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the area of the region enclosed by the curve $y = \cos x$ between $x = 0$ and $x = 2\pi$. 8

6 0

b) Find the shortest distance between the lines

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1} \text{ and}$$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}.$$ 8

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int \frac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)} dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x.$$ 8

9. Attempt any *one* part of the following :

a) Evaluate :

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)} dx.$$ 8

b) Solve : $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x$. 8