



छत्तीसगढ़ माध्यमिक शिक्षा मण्डल रायपुर  
द्वारा निर्मित प्रश्न बैंक  
**2023-24**



**कक्षा 12**

**गणित (MATHEMATICS)**

# अनुक्रमणिका

$\pi$

क्र. अध्याय	पृ. क्र.
1 संबंध एवं फलन - Relations and Functions	3
2 प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन - Inverse Trigonometric Functions	6
3 आव्यूह - Matrix	10
4 सारणिक - Determinant	18
5 सांतत्य तथा अवकलनीयता - Continuity and Differentiability	21
6 अवकलज के अनुप्रयोग - Applications of Derivatives	30
7 समाकलन - Integration	34
8 समाकलनों के अनुप्रयोग - Applications of Integrals	40
9 अवकल समीकरण - Differential Equations	42
10 सदिश बीजगणित - Vector Algebra	45
11 त्रि-विमीय ज्यामिती - Three-Dimensional Geometry	48
12 रैखिक प्रोग्रामन - Linear Programming	51
13 प्रायिकता - Probability	53

# इकाई 1

## संबंध एवं फलन

### (Relation and Function)

लघुत्तरीय प्रश्न : अंक-04 (Short Answers Questions : Marks 4)

प्रश्न:-1. यदि  $R$  प्राकृत संख्याओं के समुच्चय  $N$  पर आधारित एक संबंध इस प्रकार हो कि

$$R = \{(x, y) : x \in N, y \in N, 2x + y = 4\}$$

तब इसका प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि यह स्वतुल्य, सममित और संक्रामक है।

If  $R$  is a relation based on the set  $N$  of natural numbers such that

$$R = \{(x, y) : x \in N, y \in N, 2x + y = 4\}$$

Then Find its domain and range and prove that it is reflexive, symmetric and transitive.

प्रश्न:-2. माना  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  तथा  $R = \{(a, b) : |a - b|, 2 \text{ से विभाजित है तो सिद्ध कीजिए कि } R \text{ एक तुल्यता संबंध है।}$

Suppose  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  and  $R = \{(a, b) : |a - b|, \text{ which is divided by, } 2 \text{ prove that } R \text{ is an equivalence relation.}$

प्रश्न:-3. मान लीजिए कि  $xy$ -तल में स्थित समस्त रेखाओं का समुच्चय  $L$  है और  $L$  में  $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \parallel L_2\}$  द्वारा परिभाषित है। सिद्ध कीजिए कि  $R$  एक तुल्यता संबंध है।

Let  $L$  be the set of all lines in  $XY$  plane and  $R$  be the relation is in  $L$  defined as  $R = \{(L_1, L_2) : L_1 \parallel L_2\}$ , show that  $R$  is an equivalence relation.

प्रश्न:-4. मान लीजिए कि समस्त  $n \in \mathbb{N}$  के लिए  $f(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ is odd} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ is even} \end{cases}$

द्वारा परिभाषित एक फलन  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  है। बतलाइए कि क्या फलन  $f$  एकैकी, आच्छादी है? अपने उत्तर का औचित्य भी बतलाइए।

Let  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  be defined by-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \text{ is odd} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ is even} \end{cases}$$

State whether the function is bijective justify your answer.

प्रश्न:-5.  $g \circ f$  तथा  $f \circ g$  ज्ञात कीजिए यदि -

Find  $g \circ f$  and  $f \circ g$  if

(i)  $f(x) = |x|$ ;  $g(x) = |5x - 2|$

(ii)  $f(x) = 8x^3$ ;  $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

(iii)  $f(x) = \cos x$ ;  $g(x) = 3x^2$

(iv)  $f(x) = \frac{x}{1+|x|} \forall x \in \mathbb{R}$ ;  $g(x) = \frac{x}{1-|x|} \forall x \in \mathbb{R}$

प्रश्न:-6.  $f(x) = 4x + 3$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि  $f$  व्युत्क्रमणीय है।  $f$  का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए।

Consider the function  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  given by  $f(x) = 4x + 3$ . Prove that  $f$  is invertible; also Find the inverse function of  $f$ .

प्रश्न:-7.  $a * b = a^3 + b^3$  प्रकार से परिभाषित  $\mathbb{N}$  में एक द्वि-आधारी संक्रिया  $*$  पर विचार कीजिए। संक्रिया की क्रमविनिमेयता एवं साहचर्यता की जांच कीजिए।

Consider a binary operation  $*$  on  $\mathbb{N}$  defined as  $a*b=a^3+b^3$ . Check the commutability and associativity of the operation.

प्रश्न:-8. मान लीजिए कि  $f:X \rightarrow Y$  एक व्युत्क्रमणीय फलन है तब सिद्ध कीजिए कि  $f^{-1}$  का प्रतिलोम  $f$  है अर्थात्  $(f^{-1})^{-1} = f$  है।

Let  $f:X \rightarrow Y$  be an invertible function then show that the inverse of  $f^{-1}$  is  $f$  i.e.  $(f^{-1})^{-1} = f$

प्रश्न:-9.  $f(x) = x^2 + 4$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f:R_+ \rightarrow [4, \infty)$  पर विचार कीजिए। सिद्ध कीजिए कि  $f$  व्युत्क्रमणीय है तथा  $f$  का प्रतिलोम  $f^{-1}, f^{-1} = \sqrt{y-4}$  द्वारा प्राप्त होता है, जहाँ  $R_+$  सभी ऋणेतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

Consider  $f:R_+ \rightarrow [4, \infty)$  given by  $f(x) = x^2 + 4$ . show that  $f$  is invertible with the inverse  $f^{-1}$  of  $f$  given by  $f^{-1}(y) = \sqrt{y-4}$  where  $R_+$  is the set of all non-negative real numbers.

प्रश्न:-10. यदि  $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}, x \neq \frac{2}{3}$  तो सिद्ध कीजिए कि सभी  $x \neq \frac{2}{3}$  के लिए  $f \circ f(x) = x$  है।  $f$  का प्रतिलोम फलन क्या है?

if  $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}, x \neq \frac{2}{3}$ , show that  $f \circ f(x) = x$  for all  $x \neq \frac{2}{3}$ , what is the inverse of  $f$ ?

# प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse Trigonometric Function)

$\pi$

अति लघुत्तरीय प्रश्न : अंक-02 (Very Short Answers Questions : Marks 2)

प्रश्न:-1.  $\tan^2(\sec^{-1}2) + \cot^2(\operatorname{cosec}^{-1}3)$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\tan^2(\sec^{-1}2) + \cot^2(\operatorname{cosec}^{-1}3)$

प्रश्न:-2. यदि  $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$  तब  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}x\right) = 1$  then Find the value of  $x$ .

प्रश्न:-3. यदि  $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$  तब  $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$  then Find the value of

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$

प्रश्न:-4.  $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$  का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

Find the principal value of  $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ .

प्रश्न:-5.  $\cot(\sin^{-1}x)$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\cot(\sin^{-1}x)$

प्रश्न:-6.  $\cos^{-1}\frac{1}{2} + 2\sin^{-1}\frac{1}{2}$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\cos^{-1}\frac{1}{2} + 2\sin^{-1}\frac{1}{2}$

प्रश्न:-7.  $\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \right)$  ;  $(0 < x < \pi)$  को सरलतम रूप में लिखिए।

Write the following function in the simplest form

$$\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \right) ; 0 < x < \pi$$

प्रश्न:-8.  $\tan^{-1} \left( \tan \frac{3\pi}{4} \right)$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\tan^{-1} \left( \tan \frac{3\pi}{4} \right)$

प्रश्न:-9. सिद्ध कीजिए कि  $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ ,  $x \in \left[ \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$

Prove that  $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ ,  $x \in \left[ \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$

प्रश्न:-10.  $\tan^{-1} \left[ 2 \cos \left( 2 \sin^{-1} \frac{1}{2} \right) \right]$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\tan^{-1} \left[ 2 \cos \left( 2 \sin^{-1} \frac{1}{2} \right) \right]$

प्रश्न:-11. सिद्ध कीजिए कि  $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in [-1, 1]$

Prove that  $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in [-1, 1]$

प्रश्न:-12. सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$ ,  $xy < 1$

Prove that  $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$ ,  $xy < 1$

प्रश्न:-13. सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1} x \frac{2}{11} + \tan^{-1} y \frac{7}{24} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$

Prove that  $\tan^{-1} x \frac{2}{11} + \tan^{-1} y \frac{7}{24} = \tan^{-1} \frac{1}{2}$

लघु उत्तरीय प्रश्न : अंक-04 (Short Answers Questions : Marks 4)

प्रश्न:-1. यदि  $\sin^{-1} \frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1} \frac{1-b^2}{1+b^2} = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$  हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$x = \frac{a-b}{1+ab}$$

If  $\sin^{-1} \frac{2a}{1+a^2} - \cos^{-1} \frac{1-b^2}{1+b^2} = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$  Then prove that

$$x = \frac{a-b}{1+ab}$$

प्रश्न:-2. सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x, \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$

Prove that  $\tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1} x$

प्रश्न:-3. सिद्ध कीजिए कि  $\tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

Prove that  $\tan^{-1} \frac{1}{5} + \tan^{-1} \frac{1}{7} + \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न:-4. सिद्ध कीजिए कि  $\cos^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$

Prove that  $\cos^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$

प्रश्न:-5. यदि  $\tan^{-1} \left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\pi}{4}$  हो तो k का मान ज्ञात कीजिए।

If  $\tan^{-1} \left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\pi}{4}$  then Find the value of K.

प्रश्न:-6. यदि  $\sin^{-1}(1-x) - 2 \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$  तो x का मान ज्ञात कीजिए।

If  $\sin^{-1}(1-x) - 2 \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$  then Find the value of X.



प्रश्न:-7.  $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ,  $|x| < a$  को सरलतम रूप में लिखिए।

Write  $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ,  $|x| < a$  in its simplest form.

प्रश्न:-8. सिद्ध कीजिए कि  $\cot^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right] = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Prove that  $\cot^{-1} \left[ \frac{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}} \right] = \frac{\pi}{2}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

प्रश्न:-9.  $\tan^{-1} \left( \frac{\cos x}{1-\sin x} \right)$ ,  $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  को सरलतम रूप में लिखिए।

Write the following in the simplest form –

$$\tan^{-1} \left( \frac{\cos x}{1-\sin x} \right), -\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

प्रश्न:-10. दर्शाइए की  $\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{-8}{17} = \cos^{-1} \frac{84}{85}$

show that:  $\sin^{-1} \frac{3}{5} - \sin^{-1} \frac{-8}{17} = \cos^{-1} \frac{84}{85}$

## इकाई- 2 (Unit- 2)

### आव्यूह

### (Matrices)

अति लघुत्तरीय प्रश्न : अंक-01 (Very Short Answers Questions : Marks 1)

प्रश्न:-1 एक  $3 \times 4$  आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से

प्राप्त होते हैं- (i)  $a_{ij}=2i-j$  (ii)  $a_{ij}=\frac{i}{j}$  (iii)  $a_{ij}=|-2i + 3j|$

Construct a  $3 \times 4$  matrix whose elements are obtained in the following

manner: (i)  $a_{ij}=2i-j$  (ii)  $a_{ij}=\frac{i}{j}$  (iii)  $a_{ij}=|-2i + 3j|$

प्रश्न:-2. निम्नलिखित समीकरणों में  $x, y$  तथा  $z$  के मान ज्ञात कीजिए -

$$(i) \begin{bmatrix} x + y & 2 \\ 5 + z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} x + y + z \\ x + z \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Find the values of  $x, y$  and  $z$  in the following equation-

$$(i) \begin{bmatrix} x + y & 2 \\ 5 + z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} x + y + z \\ x + z \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

प्रश्न:-3. यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  हो, तो निम्नलिखित का

मान ज्ञात कीजिए - (i)  $A-B$  (ii)  $A+B$  (iii)  $AB$  (iv)  $BA$

If  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  then Find the value of the

following (i)  $A-B$  (ii)  $A+B$  (iii)  $AB$  (iv)  $BA$

प्रश्न:-4. यदि  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$  तो दर्शाइए कि

(i)  $(A')' = A$  (ii)  $(AB)' = B'A'$  (iii)  $(KA)' = kA'$

If  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$  and  $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$  show that

(i)  $(A')' = A$  (ii)  $(AB)' = B'A'$  (iii)  $(KA)' = kA'$

प्रश्न:-5. यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$  हो तो दर्शाइए कि

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

If  $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$  is, show that  $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

प्रश्न:-6. यदि  $A = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}$ , तथा  $x^2 = -1$  तो  $A^2$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $A = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}$ , and  $x^2 = -1$  then Find the value of  $A^2$ .

प्रश्न:-7. यदि  $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  हो, तो सत्यापित कीजिए कि

(i)  $(A+B)' = A'+B'$       (ii)  $(A-B)' = A'-B'$

If  $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  and  $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$  are, verify that

(i)  $(A+B)' = A'+B'$       (ii)  $(A-B)' = A'-B'$

प्रश्न:-8. (i) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  एक सममित आव्यूह है।

(ii) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  एक विषम सममित आव्यूह है।

(i) Prove that the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  is a symmetric matrix.

(ii) Prove that the matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  is skew symmetric matrix.

प्रश्न:-9. आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$  के लिए सत्यापित कीजिए कि

1.  $(A+A')$  एक सममित आव्यूह है।
2.  $(A-A')$  एक विषम सममित आव्यूह है।

For the matrix  $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$  verify that

1.  $(A+A')$  is a symmetric matrix.
2.  $(A-A')$  is a skew symmetric matrix.

प्रश्न:-10. यदि  $A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}$  तथा  $A+A'=I$  हो, तो  $\phi$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}$  and  $A+A'=I$ , then Find the value of  $\phi$ .

प्रश्न:-11. यदि  $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$  हो, तो  $x$  तथा  $y$  के मान ज्ञात कीजिए।

If  $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$  then Find the values of  $x$  and  $y$ .

प्रश्न:-12. यदि  $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$  हो तो सत्यापित कीजिए कि  $AA'=I$

If  $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$  then verify that  $AA'=I$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न : अंक-06 (Long Answers Questions : Marks 6)

प्रश्न:-1. यदि  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$  तथा  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  एवं  $A^2 = kA - 2I$  हो तो  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$  and  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  and  $A^2 = kA - 2I$  then Find the value of  $k$ .

प्रश्न:-2. यदि  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  है तो  $A^2 - 5A + 6I$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  is, then Find the value of  $A^2 - 5A + 6I$ .

प्रश्न:-3. यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$

If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  then prove that  $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$

प्रश्न:-4. यदि  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $A^2 - 3A - 7I = 0$  तथा  $A^{-1}$  ज्ञात कीजिए।

If  $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  then prove that  $A^2 - 3A - 7I = 0$  and Find  $A^{-1}$ .

प्रश्न:-5. यदि  $A$  तथा  $B$  कोई दो वर्ग आव्यूह हो तथा  $AB = BA$  हो तो गणितीय आगमन से सिद्ध कीजिए कि  $(AB)' = A'B'$

If  $A$  and  $B$  are any two square matrices and  $AB = BA$ , then prove by mathematical induction that:  $(AB)' = A'B'$

प्रश्न:-6. प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूहों का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए—

$$(i) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(v) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(vi) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Find the inverse of the following matrices using elementary operations:

$$(i) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(iv) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(v) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(vi) \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न:-7. यदि  $[x \quad -5 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$  हो तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $[x \quad -5 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$  then Find the value of  $x$ .

प्रश्न:-8.  $x, y$  तथा  $z$  के मान ज्ञात कीजिए यदि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$

समीकरण  $A'A=I$  को संतुष्ट करता है।

Find the values of  $x, y$  and  $z$  if matrix  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$  satisfies the equation  $A'A = I$ .

प्रश्न:-9. यदि  $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  है तो सिद्ध कीजिए कि

$$F(x)F(y) = F(x + y)$$

If  $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , prove that  $F(x)F(y) = F(x + y)$

प्रश्न:-10. आव्यूह  $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  को एक सममित आव्यूह तथा सममित

आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

Express the matrix  $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$  as the sum of a

symmetric and a skew symmetric matrix.

प्रश्न:-11. निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए।



Solve the following system of equations by matrix method –

$$3x - 2y + 3z = 8$$

$$2x + y - z = 1$$

$$4x - 3y + 2z = 4$$

प्रश्न:-12. तीन संख्याओं का योग 6 है। यदि हम तीसरी संख्या को 3 से गुणा करके दूसरी संख्या में जोड़ दें तो हमें 11 प्राप्त होता है। पहली और तीसरी को जोड़ने से हमें दूसरी संख्या का दोगुना प्राप्त होता है। इसका बीजगणितीय निरूपण कीजिए और आव्यूह विधि से संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

The sum of three numbers is 6. If we multiply the third number by 3 and add the second number to it, we get 11. By adding the first and third numbers, we get double of the second number. Represent it algebraically and find the numbers using matrix method.

# सारणिक (Determinant)



अति लघुत्तरीय प्रश्न : अंक-02 (Very Short Answers Questions : Marks 2)

प्रश्न:-1. यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  तो दिखाइए कि  $|2A| = 4|A|$

If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$  then show that  $|2A| = 4|A|$

प्रश्न:-2. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल सारणिक की सहायता से ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज के शीर्ष क्रमशः  $(3,8), (-4,2)$  और  $(5,1)$  हैं।

Find the area of a triangle using determinant if vertices of triangle are  $(3,8), (4,2)$  and  $(5,1)$ .

प्रश्न:-3. 4 वर्ग इकाई क्षेत्रफल वाले किसी त्रिभुज के शीर्ष बिंदु  $(k,0), (4,0), (0,2)$  हों, तो  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।

If the vertices of a triangle of area of 4 square units are  $(k,0), (4, 0), (0,2)$ , then Find the value of  $K$ .

प्रश्न:-4. सारणिक  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$  के सभी अवयवों के उपसारणिक एवं सहखंड ज्ञात कीजिए।

Find the minors and cofactor of all the elements of the determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

प्रश्न:-5. यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$  हो तो  $|A|$  ज्ञात कीजिए।

if  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ , then Find  $|A|$ .

प्रश्न:-6. यदि  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$  तो  $x$  का मान ज्ञात कीजिए।

if  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ , then Find the value of  $x$ .

लघु उत्तरीय प्रश्न : अंक-04 (Short Answers Questions : Marks 4)

प्रश्न:-1. सिद्ध कीजिए कि  $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

Prove that  $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

प्रश्न:-2. सिद्ध कीजिए कि  $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

Prove that  $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

प्रश्न:-3. सिद्ध कीजिए कि  $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

Prove that 
$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

प्रश्न:-4. यदि  $x, y, z$  विभिन्न हों और 
$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$

तो दशांश कि  $1+xyz=0$

If  $x, y, z$  are different and 
$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$$
 Then show that

$1+xyz=0$

प्रश्न:-5. सारणिकों का प्रयोग करके  $A(1,3)$  और  $B(0,0)$  को जोड़ने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए और  $k$  का मान ज्ञात कीजिए, यदि एक बिंदु  $D(k, 0)$  इसप्रकार है कि  $\Delta(ABC)$  का क्षेत्रफल 3 वर्ग इकाई है।

Find the equation of the line joining  $A(1,3)$  and  $B(0,0)$  using determinants and Find  $k$  if  $D(k,0)$  is a point such that area of triangle  $ABC$  is 3 square unit.

## इकाई-3 (Unit-3)

### अध्याय 5 – सांतत्य एवं अवकलनीयता

#### CHAPTER 5 – CONTINUTIY AND DEFFERENTIABILITY

अति लघुत्तरीय प्रश्न : अंक-02 (Very Short Answers Questions : Marks 2)

1. दर्शाइए कि फलन  $f(x) = |\sin x + \cos x|$  बिंदु,  $x = \pi$  पर संतत है।  
**Show that the function  $f(x) = |\sin x + \cos x|$  is continuous at the point  $x = \pi$**
2. दर्शाइए कि फलन  $f(x) = |x - 5|$  बिंदु,  $x = 5$  पर संतत है परन्तु अवकलनीय नहीं है।  
**Show that the function  $f(x) = |x - 5|$  is continuous at the point  $x = 5$  but not differentiable.**
3. फलन  $f(x) = \tan x \cdot \sec x$  के सांतत्य की जाँच कीजिए।  
**Check the continuity of the function  $f(x) = \tan x \cdot \sec x$**
4. फलन  $f(x) = \sin x \cdot \cos x$  के सांतत्य होने की जाँच कीजिए।  
**Check the continuity of the function  $f(x) = \sin x \cdot \cos x$**
5. दर्शाइए कि  $f(x) = \sin(x^2)$  द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।  
**Show that the function defined by  $f(x) = \sin(x^2)$  is a continuous function.**
6. फलन  $f(x) = 2x^2 - 1$  का बिंदु  $x = 3$  पर सांतत्यता की जाँच कीजिए।  
**Check the continuity of the function  $f(x) = 2x^2 - 1$  at the point  $x = 3$ .**
7. फलन  $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$  का बिंदु  $x \neq -5$  पर सांतत्यता की जाँच कीजिए।  
**Check the continuity of the function  $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x + 5}$  at the point  $x \neq -5$**
8. दर्शाइए कि फलन  $f(x) = [x]$  जहाँ,  $[x]$  एक महत्तम पूर्णांक फलन है बिन्दु  $x = 1.5$  पर संतत है।  
**Show that the function  $f(x) = [x]$  where,  $[x]$  is a greatest integer function, is continuous on.  $x = 1.5$**

9. यदि  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  हो तो फलन के संयोजन  $y = f[f(x)]$  के असंतत बिंदु ज्ञात कीजिए।

if  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  then Find the discontinuous points of the composition of the function  $y = f[f(x)]$ .

10. दर्शाइए कि फलन  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

बिंदु  $x=0$  पर संतत है।

Show that the function  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

is continuous at the point  $x=0$ .

11. फलन  $f(x) = x|x|, \forall x \in R$ ,  $x=0$  के लिए बिंदु पर अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

Check the differentiability of the function at the point  $x=0$

$f(x) = x|x|, \forall x \in R$

12. परिभाषित फलन  $f(x) = \begin{cases} \text{यदि } x \neq 2 \\ \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} \\ 5 \text{ यदि } x = 2 \end{cases}$

के लिए बिंदु  $x=2$  पर सांतत्यता की जांच कीजिए

For the defined function  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} & \text{If } x \neq 2 \\ 5 & \text{If } x = 2 \end{cases}$

check the continuity of the function of the point  $x=2$

13. दशाइए कि फलन  $f(x) = |\sin x + \cos x|$  बिंदु  $x = \pi$  पर संतत है।

Show that the function  $f(x) = |\sin x + \cos x|$  is continuous at point  $x = \pi$ .

14. फलन  $f$  के सभी असांतत्य बिंदुओं को ज्ञात कीजिए, जहां  $f$  निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{यदि } x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

Find all the points of discontinuity of the function  $f$  where  $f$  is defined by

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{If } x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{If } x > 2 \end{cases}$$

15.  $f$  के सभी असंतत बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि फलन  $f$  निम्नलिखित रूप से परिभाषित है।

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{यदि } x < 2 \\ -1 & \text{यदि } x \geq 2 \end{cases}$$

Find all the points of discontinuity of  $F$

Whereas the function  $F$  is defined as follows.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{If } x < 2 \\ -1 & \text{If } x \geq 2 \end{cases}$$

16. फलन  $f$  के सभी असंतत बिंदुओं को ज्ञात कीजिए

जबकि  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{यदि } x < 0 \\ x+1 & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$

Find all the points of discontinuity of function  $f$

while

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{If } x < 0 \\ x+1 & \text{If } x \geq 0 \end{cases}$$

17.  $f$  के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ  $f$  निम्नलिखित प्रकार में परिभाषित है।

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{यदि } x \neq 0 \\ -1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

Examine the continuity of  $f$ , where  $f$  is defined by

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x & \text{If } x \neq 0 \\ -1 & \text{If } x = 0 \end{cases}$$

दिया गया फलन

18. 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx^2}{3} & \text{यदि } x \leq 2 \\ & \text{यदि } > 2 \end{cases}$$

बिंदु  $x=2$  पर संतत है तो  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।

Given function

$$f(x) = \begin{cases} Kx^2 & \text{If } x \leq 2 \\ 3 & \text{If } x > 2 \end{cases}$$

is continuous at the point  $x=2$  then Find the value of  $k$ .

19. 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx+1}{\cos x} & \text{यदि } x \leq \pi \\ & \text{यदि } x > \pi \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन  $x = \pi$  पर संतत है तो  $k$  का मान ज्ञात कीजिए।

If the function  $f$  is defined by

$$f(x) = \begin{cases} Kx+1 & \text{If दि } x \leq \pi \\ \cos x & \text{If } x > \pi \end{cases}$$

is continuous at  $x = \pi$  then Find the value of  $k$ .



20. दर्शाइए कि फलन  $f(x) = \cos(x^2)$  एक संतत फलन है।

Show that the function  $f(x) = \cos(x^2)$  is a continuous function.

21. यदि फलन  $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \geq 1 \\ x+2, & x < 1 \end{cases}$  एक संतत फलन है तो  $a$  का मान क्या होगा।

If the function  $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x \geq 1 \\ x+2, & x < 1 \end{cases}$  is a continuous function then what will be the value of  $a$ .

22.  $f(x) = |x| - |x+1|$  द्वारा परिभाषित फलन के सभी असंतत बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

Find all the points of discontinuity of defined by  $f(x) = |x| - |x+1|$

23. यदि  $\cos y = x \cos(a+y)$  तथा  $\cos a \neq \pm 1$  तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$

If  $\cos y = x \cos(a+y)$ , with  $\cos a \neq \pm 1$ , Prove that  $\frac{dy}{dx} =$

$$\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$$

24. दिए गए फलनों का  $x$  के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए :-

Find the derivative of the given functions with respect to  $x$ :-

(i)  $\sin(\cos(x^2))$

(ii)  $\sin x^2 + \sin^2 x + \sin^2(x^2)$

(iii)  $\log(\log(\log(x^5)))$

(iv)  $\sec(\tan(\sqrt{x}))$

(v)  $2\sqrt{\cot(x^2)}$

(vi)  $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$

(vii)  $\cot^{-1}x$

(viii)  $\frac{\cos x}{\log x}$

(ix)  $\frac{.8^x}{x^8}$

(xi)  $e^{\sin^{-1}x}$

(xiii)  $\sin(\tan^{-1}(e^{-x}))$

(xv)  $2^{\cos^2 x}$

25.  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\frac{dy}{dx}$

If

1.  $y + \sin y = \cos x$

2.  $\sin^2 y + \cos xy = K$

3.  $(x^2 + y^2) = xy$

4.  $\tan^{-1}(x^2 + y^2) = a$

लघु उत्तरीय प्रश्न : अंक-04 (Short Answers Questions : Marks 4)

दिए गए फलनों का  $x$  के सापेक्ष अवकलन कीजिए

(i)  $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$  जहाँ  $1 < x < 1$

(ii)  $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^2}{1+x^2}\right)$  जहाँ  $\frac{-1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$

(iii)  $y = \tan^{-1}(\sec x + \tan x)$  जहाँ  $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(iv)  $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right)$  जहाँ  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(v)  $\cos^{-1}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}\right)$   $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(vi) यदि  $y = \tan^{-1} x$  हो तो  $\frac{d^2y}{dx^2}$  का मान  $y$  के पदों में ज्ञात कीजिए।

If  $y = \tan^{-1} x$  yes then  $\frac{d^2y}{dx^2}$  Find the value of in terms of  $y$ .

(vii) यदि  $x = e^{\frac{x}{y}}$  हो तो सिद्ध कीजिए।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x \log x}$$

If  $x = e^{\frac{x}{y}}$  is then prove that.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y}{x \log x}$

(viii) फलन  $(\cos x)^y = (\cos y)^x$  के लिए  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\frac{dy}{dx}$  for the function  $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

(ix) यदि  $y^x = e^{y-x}$  हो तो सिद्ध कीजिए  $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \log y)^2}{\log y}$

If  $y^x = e^{y-x}$  then prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + \log y)^2}{\log y}$

(x)  $x(\sin(x+y) + \sin a \cos(a+y)) = 0$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin x}$

If  $x(\sin(x+y) + \sin a \cos(a+y)) = 0$  then prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin x}$

(xi) यदि  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  हो तो  $\frac{dy}{dx}$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  then Find the value of  $\frac{dy}{dx}$

(xii) यदि  $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}$ ,  $y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$  हो तो दर्शाइए कि  $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$

If  $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}$ ,  $y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$  is then show that  $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$

(xiii) फलन  $\frac{x}{\sin x}$  का  $\sin x$  के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

Differentiate the function  $\frac{x}{\sin x}$  with respect to  $\sin x$ .

(xiv) फलन  $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$  का  $\tan^{-1} x$  के सापेक्ष अवकलन कीजिए जबकि  $x \neq 0$

Differentiate the function  $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$  with respect to  $\tan^{-1} x$  while  $x \neq 0$ .

(xv) यदि  $e^{x(x+1)}=1$  हो तो दर्शाइए

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

If  $e^{x(x+1)}=1$  then show  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

### दीर्घ उत्तरीय प्रश्न : अंक-06 (Long Answers Questions : Marks 6)

1. यदि  $y = \sin^{-1} x$  हो तो दर्शाइए कि

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$$

if  $y = \sin^{-1} x$  then show that  $(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} = 0$

2. यदि  $y = (\tan^{-1} x)^2$  है तो दर्शाइए कि  $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2$

If  $y = (\tan^{-1} x)^2$  exists then show that  $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2$ .

3. अंतराल  $[1,4]$  में  $f(x) = x^2 - 4x - 3$  के लिए मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify the mean value theorem for  $f(x) = x^2 - 4x - 3$  in the interval  $[1,4]$ .

4. फलन  $f(x) = \log(x^2 + 2) - \log 3; x \in [-1, 1]$  के लिए रोले का प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function  $f(x) = \log(x^2 + 2) - \log 3; x \in [-1, 1]$

5. फलन  $f(x) = \sqrt{4-x^2}; x \in [-2, 2]$  के लिए रोले का प्रमेय सत्यापित कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function  $f(x) = \sqrt{4-x^2}; x \in [-2, 2]$ .

6. फलन  $f(x) = \frac{1}{4x-1}$   $x \in (1,4)$  के लिए मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify the mean value theorem for the function  $f(x) = \frac{1}{4x-1}$   $x \in (1,4)$ .

7. अंतराल  $[0, \pi]$  में  $f(x) = \sin x - \sin 2x$  के लिए मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify the mean value theorem for  $f(x) = \sin x - \sin 2x$  in the interval  $[0, \pi]$

अध्याय – 6  
अवकलज के अनुप्रयोग  
(Application of Derivatives)



लघु उत्तरीय प्रश्न : अंक-04 (Short Answers Questions : Marks 4)

1. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है जिसका व्यास  $\frac{3}{2}(2x + 1)$  परिवर्तनशील है तो  $x$  के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

A balloon, which always remains spherical, has a variable diameter  $\frac{3}{2}(2x + 1)$  Find the rate of change of its volume with respect to  $x$ .

2. एक 5 मीटर लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश दीवार से दूर 2 सेमी प्रति से की दर से खींचा जाता है दीवार पर उसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 मीटर दूर है।

A ladder 5 meter long is leaning against a wall. The bottom of the ladder is pulled along the ground away from the wall at the rate of 2cm/s. How fast is it's height on the wall decreasing when the foot of the ladder is 4 meter away from.

3. किसी आयत की लंबाई 3 सेमी प्रति मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई 2 सेमी प्रति मिनट की दर से बढ़ रही है जब लंबाई 10 सेमी. तथा चौड़ाई 6 सेमी है तब आयत का परिमाप व क्षेत्रफल दोनों में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

The length of a rectangle is decreasing at the rate of 3 cm per minute and the width is increasing at the rate of 2 cm per minute when the length is 10 cm. and width is 6 cm then find the rate of change in both perimeter and area of the rectangle.

4. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगे वृत्तों में  $5 \text{ cm/s}$  की गति से चलती है जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 सेमी है तो उस क्षण घिरा हुआ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है।

A stone is dropped into a quiet lake and waves move in circles at the speed of 5 cm/s. At the instant whe the radius of the circular wave is 8 cm, how fast is the enclosed area increasing.

5. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$  से प्रदत्त फलन वर्धमान तथा हासमान है।

**Find the intervals in which the given function is increasing and decreasing**

•  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

6. सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन  $(0, \infty)$  में वर्धमान फलन है।

**Prove that the logarithmic function is an increasing function. in  $(0, \infty)$**

7.  $x$  के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए  $y = (x(x-2))^2$  एक वर्धमान फलन है।

**Find those values of  $x$  for which  $y = (x(x-2))^2$  is an increasing function.**

8. सिद्ध कीजिए कि  $\mathbb{R}$  में दिया गया फलन  $f(x) = 3x^2 + 3x - 100$  वर्धमान है।

**Prove that the function  $f(x) = 3x^2 + 3x - 100$  given in  $\mathbb{R}$  is increasing.**

9. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें  $f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f$  वर्धमान या हासमान है।

**Find the interval in which the function  $F$  given**

**by  $f(x) = \sin x + \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$  is increasing or decreasing.**

10. प्रवणता 0 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र  $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$  को स्पर्श करती है।

**Find the equation of all lines of slope 0 which touch the curve  $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$**

11. वक्र  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ

(i)  $x$ -अक्ष के समान्तर है

(ii)  $y$ -अक्ष के समान्तर है।

**Find the points on the curve  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$  at which the tangents are**

**(ii) Parallel to the axis; (iii) parallel to  $y$ -axis.**

12. परवलय  $y^2 = 4ax$  के बिंदु  $(at^2, 2at)$  पर स्पर्श रेखा और अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

**Find the equation of tangent and normal at point  $(at^2, 2at)$  of parabola  $y^2 = 4ax$**

13. वक्र  $y = \sqrt{5x - 3} - 2$  की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $4x - 2y + 3 = 0$  के समान्तर है।

**Find the equations of the tangents to the curve  $y = \sqrt{5x - 3} - 2$  which is parallel to the line  $4x - 2y + 3 = 0$**

14. दिए गए वक्र  $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$  का बिंदु  $(0, 5)$  पर स्पर्श रेखा और अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent and normal to the given curve

$$y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$$

at point  $(0, 5)$

15. प्रवणता 2 वाली सभी रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र  $y + \frac{2}{x-3} = 0$  को स्पर्श करती है।

Find the equation of all lines having slope 2 and being tangent to the

curve  $y + \frac{2}{x-3} = 0$  .

16. अवकलन का प्रयोग कर  $(25)^{\frac{1}{3}}$  का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

Using Differential, find the approximate value of  $(25)^{\frac{1}{3}}$

17. अवकलन का प्रयोग कर  $\sqrt{0.6}$  का सन्निकट मान दशमलव के तीन स्थान तक ज्ञात कीजिए।

Using Differentials, find the approximate value of  $\sqrt{0.6}$  upto three places of decimal.

18. एक गोले की त्रिज्या 7 m मापी जाती है जिसमें 0.02 m की त्रुटि है इसके आयतन के परिकलन में सन्निकट त्रुटि ज्ञात कीजिए।

The radius of a sphere is measured to be 7 mm with an error of 0.02 mm.

Find the approximate error in calculating its volume.

19.  $f(2.001)$  का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए जहाँ  $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$  है।

Find the approximate value of  $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$  where  $f(2.001)$  is.

20. अंतराल  $[0, 3]$  पर  $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$  में उच्चतम मान और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

Find the maximum value and minimum value in  $3x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 48x + 25$  on the interval  $[0, 3]$  .

21. फलन  $\sin x + \cos x$  का उच्चतम मान ज्ञात कीजिए।

Find the maximum value of the function .

22.  $[0, 2\pi]$  पर फलन  $x + \sin 2x$  का उच्चतम मान और निम्नतम मान ज्ञात कीजिए।

Find the maximum and minimum value of the function  $x + \sin 2x$  on  $[0, 2\pi]$  .



23. सिद्ध कीजिए कि एक दिए गए वृत्त के अंतर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चतम होता है।

**show that of all the rectangles inscribed in a given fixed circle, the square has the maximum area.**

24. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 24 तथा गुणनफल उच्चतम हों।

**Find two numbers whose sum is 24 and product is maximum .**

25. ऐसी दो धनात्मक संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 16 तथा उनके घनों का योग निम्नतम हो।

**Find two positive numbers whose sum is 16 and the sum of whose cubes is minimum.**

$\pi$



## इकाई-3 समाकलन (Integration)

$\pi$

अति लघुत्तरीय प्रश्न : अंक-01 (Very Short Answers Questions : Marks 1)

1.  $\int \sin^2 x \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \sin^2 x \, dx$

2.  $\int \sec^2 x \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \sec^2 x \, dx$

3.  $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} \, dx$

4.  $\int \frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2} \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2} \, dx$

5.  $\int \sqrt{1+\cos 2x} \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \sqrt{1+\cos 2x} \, dx$

6.  $\int \frac{(\cos x + 1)}{(\sin x + x)} \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{(\cos x + 1)}{(\sin x + x)} \, dx$

7.  $\int \cot x \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \cot x \, dx$

8.  $\int \frac{dx}{ax+b}$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{dx}{ax+b}$

अति लघुत्तरीय प्रश्न : अंक-02 (Very Short Answers Questions : Marks 2)



1.  $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x}$  का समाकलन कीजिए।

**Integrate**  $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x}$

2.  $\int \frac{\sec^2(\log x)}{x}$  का मान ज्ञात कीजिए।

**Find the value of**  $\int \frac{\sec^2(\log x)}{x}$

3.  $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

**Find the value of**  $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

4.  $\int \frac{1}{1-\cos x}$  का मान ज्ञात कीजिए।

**Find the value of**  $\int \frac{1}{1-\cos x}$

5.  $\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

**Find the value of**  $\int \frac{1}{\sqrt{16-9x^2}} dx$

6.  $\int \frac{(1-\cos 2x)}{(1+\cos 2x)} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

**Find the value of**  $\int \frac{(1-\cos 2x)}{(1+\cos 2x)} dx$

7.  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

**Find the value of**  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$

8.  $\int \sin^{-1}(\cos x) dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

**Find the value of**  $\int \sin^{-1}(\cos x) dx$

लघु उत्तरीय प्रश्न : अंक-04 (Short Answers Questions : Marks 4)

1.  $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{1}{x^2 - 6x + 13} dx$

2.  $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$

3.  $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$

4.  $\int e^x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int e^x \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

5.  $\int \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{e^x(1 + \sin x)}{1 + \cos x} dx$

6.  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4 \sin x + 5} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4 \sin x + 5} dx$

7.  $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5} dx$

8.  $\int \frac{e^{x \tan^{-1} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{e^{x \tan^{-1} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$

9.  $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

10.  $\int \frac{1}{1 + \cot x} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{1}{1 + \cot x} dx$

11.  $\int \frac{1}{x(x^n + 1)} dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of  $\int \frac{1}{x(x^n + 1)} dx$

$\pi$



दीर्घ उत्तरीय प्रश्न : अंक-06 (Long Answers Questions : Marks 6)

1. सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}} dx = \frac{\pi}{4}$

Prove that  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}} dx = \frac{\pi}{4}$

2. सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{4}$

Prove that  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{4}$

3. सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

Prove that  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

4. सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$

Prove that  $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$

5. सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx = \pi$

Prove that  $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx = \pi$

6. सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{16}$

Prove that  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi}{16}$

7. सिद्ध कीजिए कि  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} dx = \frac{\pi}{12}$

Prove that  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} dx = \frac{\pi}{12}$

8. सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log_e 2$

Prove that  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log_e 2$

9. सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x) \, dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2$

Prove that  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x) \, dx = \frac{\pi}{8} \log_e 2$

10. सिद्ध कीजिए कि  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \left[ \frac{4+3 \sin x}{4+3 \cos x} \right] \, dx = 0$

Prove that  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log \left[ \frac{4+3 \sin x}{4+3 \cos x} \right] \, dx = 0$

# समाकलन के अनुप्रयोग (Application of Integrals)



दीर्घ उत्तरीय प्रश्न : अंक-06 (Long Answers Questions : Marks 6)

1. वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

Find the area of circle  $x^2 + y^2 = a^2$  using integration method.

2. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त  $x^2 + y^2 = 32$  रेखा  $y = x$  एवं  $x$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

Find the area of the region enclosed by circle  $x^2 + y^2 = 32$ , line  $y = x$  and  $x$ -axis in the first quadrant using integration method.

3. छेदक रेखा  $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$  द्वारा वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  के छोटे भाग का क्षेत्रफल समाकलन

विधि से ज्ञात कीजिए।

Find the area of the smaller part of the circle  $x^2 + y^2 = a^2$  by the secant line

$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$  Using integration method.

4. यदि वक्र  $x = y^2$  एवं रेखा  $x=4$  से घिरा हुआ क्षेत्रफल रेखा  $x=a$  द्वारा दो बराबर भागों में विभाजित होता है तो  $a$  का मान समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

If the area enclosed by curve  $x = y^2$  and line  $x=4$  is divided into two equal parts by the line  $x=a$ , then Find the value of  $a$  using integration method.

5. समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि जिसके शीर्ष  $(1,0), (2,2)$  एवं  $(3,1)$

Using integration, find the area of a triangle whose vertices  $(1,0), (2,2)$

And  $(3,1)$



6. दो वृत्तों  $x^2 + y^2 = 4$  एवं  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

**Find the area of the region between two circles  $x^2 + y^2 = 4$  and  $(x-2)^2 + y^2 = 4$**

7. समाकलन का उपयोग करते हुए एक ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजाओं के समीकरण  $y = 2x + 1$ ,  $y = 3x + 1$  एवं  $x = 4$  है।

**Using integration, Find the area of a triangular region whose equations of sides are  $y = 2x + 1$ ,  $y = 3x + 1$  and  $x = 4$**

8. वक्रों  $y^2 = 4ax$  तथा  $x^2 = 4ay$  जहाँ  $a > 0$  के मध्य घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

**Using Integration method find the area of the region includes between the curves  $y^2 = 4ax$  and  $x^2 = 4ay$  where  $a > 0$**

# अवकल समीकरण (Differential Equations)



अति लघुउत्तरीय प्रश्न (1 अंक) **Very short answer questions (1 mark)**

1. अवकल समीकरण  $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$  की कोटि एवं घात बताइए।

Find the order and degree of the differential equation  $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

2. अवकल समीकरण  $x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} = 0$  की कोटि एवं घात बताइए।

Find the order and degree of the differential equation  $x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} = 0$

3. अवकल समीकरण  $5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{d^2y}{dx^2} - 6y = \log x$  की कोटि एवं घात बताइए।

Find the order and degree of the differential equation  $5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{d^2y}{dx^2} - 6y = \log x$

4. अवकल समीकरण  $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + x^3 = 0$  की कोटि एवं घात बताइए।

Find the order and degree of the differential equation  $x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + x^3 = 0$

5. अवकल समीकरण  $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2$  का समाकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Find the integration factor of the differential equation  $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2$

6. अवकल समीकरण  $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$  का समाकलन गुणांक ज्ञात कीजिए।

Find the integration factor of the differential equation  $(\tan^{-1} y - x)dy = (1 + y^2)dx$

अति लघुउत्तरीय प्रश्न (2 अंक) **Very short answer questions (2 mark)**

1.  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  वक्र कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the differential equation representing family of curve  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of  $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$

3. क्या  $y = a \cos x + b \sin x$  जहाँ  $a, b \in R$ , अवकल समीकरण  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$  का हल है?

Is  $y = a \cos x + b \sin x$  where  $a, b \in R$ , a solution of the differential equation  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$  ?

4. सिद्ध कीजिए कि  $y = e^x + 1$  अवकल समीकरण  $y'' + y' = 0$  का एक हल है।

Prove that  $y = e^x + 1$  is a solution of the differential equation  $y'' + y' = 0$ .

5. बिंदु  $(-2, 3)$  से गुजरने वाले ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिंदु  $(x, y)$  पर स्पर्श रेखा की प्रवणता  $\frac{2x}{y^2}$  है।

Find the equation of a curve passing through point  $(-2, 3)$  whose slope of the tangent line at any point  $(x, y)$  is  $\frac{2x}{y^2}$ .

#### लघु उत्तरीय प्रश्न : अंक-04 (Short Answers Questions : Marks 4)

1. अवकल समीकरण  $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of the differential equation  $(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1} x$

2. अवकल समीकरण  $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of the differential equation  $x \log x \frac{dy}{dx} + y =$

$$\frac{2}{x} \log x$$

3. यदि  $xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$  तो बिन्दु  $(1, -1)$  से गुजरने वाले वक्र का हल ज्ञात कीजिए।

If  $xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$  then Find the solution of the curve passing through point  $(1, -1)$ .

4. अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, y = 0$  जब  $x = 1$  का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the differential equation  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) = 0, y = 0$  when  $x=1$ .

5. अवकल समीकरण  $(x^2 + xy)dy = (x^2 + y^2)dx$  का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the differential equation  $(x^2 + xy)dy = (x^2 + y^2)dx$

6. अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x (x \neq 0)$  का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए यदि  $y = 0, x = \frac{\pi}{2}$

Find the specific solution of the differential equation  $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x (x \neq 0)$  if  $y = 0; x = \frac{\pi}{2}$

7. अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$  का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the differential equation.  $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$

8. अवकल समीकरण  $\frac{ydx - xdy}{y} = 0$  जबकि  $x \neq 1$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of the differential equation  $\frac{ydx - xdy}{y} = 0$  while  $x \neq 1$ .

9. अवकल समीकरण  $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general solution of the differential equation  $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$

10. अवकल समीकरण  $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$  का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Find the general Solution of differential  $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x (0 \leq x < \frac{\pi}{2})$

## इकाई-04

### सदिश बीजगणित (Vector Algebra)

अति लघुउत्तरीय प्रश्न (1 अंक) Very short answer questions (1 mark)

1) यदि  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$  हो तो  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$  then Find the value of  $\vec{a} \cdot \vec{a}$ .

2) सदिश  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$  का मापांक ज्ञात कीजिए।

Find the modulus of vector  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ .

3) यदि कोई सदिश अक्षों  $OX, OY, OZ$  के साथ क्रमशः  $\alpha, \beta, \delta$  कोण बनाती है, तब सिद्ध कीजिए कि  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \delta = 2$

If a vector makes angles  $\alpha, \beta, \delta$  with the axes  $OX, OY, OZ$  respectively, then prove that  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \delta = 2$

4) सिद्ध कीजिए कि सदिश  $2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$  तथा  $-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$  परस्पर लंब हैं।

Prove that vectors  $2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$  and  $-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$  are mutually perpendicular.

5) यदि दो सदिश  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  हैं इस प्रकार हैं, कि  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ , और  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ , तो  $|\vec{a} - \vec{b}|$  ज्ञात कीजिए।

If two vectors  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  are such that  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ , and  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ , Then Find  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .

6) सदिश  $\hat{i} + \hat{j}$  पर सदिश  $\hat{i} - \hat{j}$  का प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

Find the projection of vector  $\hat{i} + \hat{j}$  on  $\hat{i} - \hat{j}$ .

लघु उत्तरीय प्रश्न : अंक-04 (Short Answers Questions : Marks 4)

- 1) दो सदिशों  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  के परिमाण ज्ञात कीजिए, यदि उनके परिमाण समान हैं और इनके बीच का कोण  $60^\circ$  तथा  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$

Find the magnitude of two vectors  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$ , if their magnitudes are equal and the angle between them is  $60^\circ$  and  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$ .

- 2) यदि दो इकाई सदिश  $\vec{a}$  और  $\vec{b}$  के बीच का कोण  $\theta$  हो तो, सिद्ध कीजिए –

$$\sin \frac{\theta}{2} = |\vec{a} - \vec{b}|$$

If the angle between two unit vectors  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  is  $\theta$ , then prove –

$$\sin \frac{\theta}{2} = |\vec{a} - \vec{b}|$$

- 3) दर्शाइए कि बिंदु  $A(1,2,7)$ ,  $B(2,6,3)$  और  $C(3,10,-1)$  संरेख हैं।

Show that (using vector method) points  $A(1,2,7)$ ,  $B(2,6,3)$  and  $C(3,10,-1)$  are co-linear.

- 4) यदि  $\vec{a} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ ,  $\vec{b} = (-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$  और  $\vec{c} = (3\hat{i} + \hat{j})$  इस प्रकार हैं कि  $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  पर लंब है तो  $\lambda$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $\vec{a} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ ,  $\vec{b} = (-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$  and  $\vec{c} = (3\hat{i} + \hat{j})$  such that  $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  perpendicular on  $\vec{c}$ , find out the value of  $\lambda$ .

- 5) बल  $\vec{F} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$  द्वारा एक कण को सरल रेखा के अनुदिश बिन्दु  $(3, 2, -1)$  से बिन्दु  $(2, -1, 4)$  तक विस्थापित करने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए।

A particle is displaced along a straight line from point  $(3, 2, -1)$  to point  $(2, -1, 4)$  by applying force  $\vec{F} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ . Find the work done by force.

- 6) सिद्ध कीजिए कि  $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$  और  $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$  से प्रत्येक पर लंब मात्रक सदिश  $\left( \frac{\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}}{\sqrt{3}} \right)$  है।

Prove that  $\frac{i-j-k}{\sqrt{3}}$  is perpendicular unit vector on each  $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$  and  $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$

- 7) उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी दो आसन्न भुजाएँ सदिशों  $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$  और  $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$  से निरूपित है।  
Find the area of parallelogram whose adjacent sides are  $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$  and  $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ .

- 8)  $\lambda$  का मान ज्ञात कीजिए यदि दो सदिश  $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$  और  $-4\hat{i} - 6\hat{j} + \lambda\hat{k}$   
(i) लम्बवत्, (ii) समान्तर है।  
Find the value of  $\lambda$  if two vectors  $2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$  and  $-4\hat{i} - 6\hat{j} + \lambda\hat{k}$   
(i) Perpendicular  
(ii) Parallel

- 9) सदिश  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  और  $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$  के बीच का कोज्या (cosine) ज्ञात कीजिए।  
Find cosine between vector  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  and  $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ .

- 10) सिद्ध कीजिए कि  $[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$   
Prove that  $[\vec{a} + \vec{b} \quad \vec{b} + \vec{c} \quad \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$

- 11) सदिश  $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$  का  $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$  पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

Find the projection of vector  $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$  on vector  $2\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

- 12) यदि  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  मात्रक सदिश इस प्रकार है कि  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \mathbf{0}$  तो  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$  का मान ज्ञात कीजिए।

If unit vectors  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  are such that  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \mathbf{0}$  then find out  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ .

- 13) यदि किसी त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु  $A(1, 1, 1), B(1, 2, 3)$  और  $C(2, 3, 1)$  है तो सदिश विधि से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

If vertices of a triangle are  $A(1, 1, 1), B(1, 2, 3)$  and  $C(2, 3, 1)$  then find the area of triangle using vector method.

# त्रिविमीय ज्यामिति

## (Three Dimensional Geometry)

अति लघुउत्तरीय प्रश्न (2 अंक) **Very short answer questions (2 mark)**

1) यदि किसी सरल रेखा की दिक्-कोज्याएँ  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = -1$

2) सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$  तथा  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$  परस्पर लंबवत है।

Prove that lines  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$  and  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$  are perpendicular

3) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो  $x, y$  तथा  $z$ - अक्षों पर क्रमशः 2, 3 और 4 अन्तःखण्ड काटता है।

Find the equation of the plane which intercepts 2, 3 and 4 on X, Y and Z axes respectively.

4) यदि एक रेखा के दिक् अनुपात 2, -1, -2 है तो इसकी दिक् कोसाइन ज्ञात कीजिए।  
If the direction ratio of a line is 2, -1, -2 then Find its direction cosine.

5) उस सरल रेखा की दिक् कोज्याएँ ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान कोण बनाती हैं।  
Find the direction cosines of the straight line which makes equal angles with the axes.

6) यदि किसी सरल रेखा की दिक् कोज्याएँ  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  हो तो सिद्ध करो कि  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$

If direction cosines of a straight line are  $\cos \alpha, \cos \beta, \text{ and } \cos \gamma$   
Then prove that  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$

7) समतलों  $2x - y + z = 6$  और  $x + y + 2z = 7$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

Find angle between planes  $2x - y + z = 6$  and  $x + y + 2z = 7$ .

8) सिद्ध कीजिए कि समतल  $x + 2y + 3z = 6$  और  $3x - 3y + z = 1$  परस्पर लम्बवत् हैं।

Prove that planes  $2x - y + z = 6$  and  $3x - 3y + z = 1$  are perpendicular.



दीर्घ उत्तरीय प्रश्न : अंक-06 (Long Answers Questions : Marks 6)

- 1) बिन्दुओं  $(2, 2, -1)$ ,  $(3, 4, 2)$  और  $(7, 0, 6)$  से जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of plane passing through points  $(2, 2, -1)$ ,  $(3, 4, 2)$  and  $(7, 0, 6)$

- 2) सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ  $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + d(3\hat{i} - \hat{j})$  तथा  $\vec{r} = 4\hat{i} - \hat{k} + a(2\hat{i} + 3\hat{k})$  प्रतिच्छेद करती हैं। प्रतिच्छेद बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Prove that lines  $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + d(3\hat{i} - \hat{j})$  and  $\vec{r} = 4\hat{i} - \hat{k} + a(2\hat{i} + 3\hat{k})$

Intersect at a point Find intersecting point also.

- 3) रेखाओं  $\vec{r} = (1 + 2\lambda)\hat{i} + (2 + 3\lambda)\hat{j} + (3 + 4\lambda)\hat{k}$  तथा  $\vec{r} = (2 + 3\mu)\hat{i} + (3 + 4\mu)\hat{j} + (4 + 5\mu)\hat{k}$  के बीच की न्यूनतम दूरी सदिश विधि से ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between given lines using vector method.

$$\vec{r} = (1 + 2\lambda)\hat{i} + (2 + 3\lambda)\hat{j} + (3 + 4\lambda)\hat{k}$$

$$\vec{r} = (2 + 3\mu)\hat{i} + (3 + 4\mu)\hat{j} + (4 + 5\mu)\hat{k}$$

- 4) उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$ ,  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$  के प्रतिच्छेदन रेखा और  $(2, 1, 3)$  से होकर जाता है।

Find the vector equation of plane which pass through intersection line of planes and  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$  and  $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$  points  $(2, 1, 3)$

- 5) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों  $3x - y + 2z - 4 = 0$  और  $x + y + z - 2 = 0$  के प्रतिच्छेदन तथा बिंदु  $(2, 2, 1)$  से होकर जाता है।

Find the equation of a plane which passes through the intersecting point of planes  $3x - y + 2z - 4 = 0$  and  $x + y + z - 2 = 0$  and the point  $(2, 2, 1)$

- 6) रेखाओं  $= \frac{y+1}{7} = \frac{z+1}{-6}$  और  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$  के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between lines  $= \frac{y+1}{7} = \frac{z+1}{-6}$  and  $\frac{x-3}{1} =$

$$\frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$$

## इकाई-05

### रैखिक कार्य योजना (linear programming)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न : अंक-06 (Long Answers Questions : Marks 6)

- 1) निम्न अवरोधों के अंतर्गत  $z = 3x + 4y$  का रैखिक प्रोग्रामन ग्राफीय विधि से अधिकतमीकरण कीजिए।

$$x + y \leq 4; x \geq 0; y \geq 0$$

Maximize given objective function  $z = 3x + 4y$  under given constraints using linear programming graphically

$$x + y \leq 4; x \geq 0; y \geq 0$$

- 2) निम्न अवरोधों के अंतर्गत  $z = 5x + 10y$  का रैखिक प्रोग्रामन ग्राफीय विधि से न्यूनतमीकरण एवं अधिकतमीकरण कीजिए।

$$x + 2y \leq 120; x + y \geq 60; x - 2y \geq 0; x, y \geq 0$$

Minimize and maximize the function  $z = 5x + 10y$  under given constraints using linear programming graphically Type equation here.

$$x + 2y \leq 120; x + y \geq 60; x - 2y \geq 0; x, y \geq 0$$

- 3) रेशमा दो प्रकार के भोज्य P और Q को इस प्रकार मिलाना चाहती है कि मिश्रण में विटामिन अवयवों में 8 मात्रक विटामिन A तथा 11 मात्रक विटामिन B हों। भोज्य P की लागत Rs 60/kg और भोज्य Q की लागत Rs 80/kg है। भोज्य P में 3 मात्रक/kg विटामिन A और 5 मात्रक/kg विटामिन B है। जबकि भोज्य Q में 4 मात्रक/kg विटामिन A और 2 मात्रक/kg विटामिन B है। मिश्रण की न्यूनतम लागत ज्ञात कीजिए।

Reshma wishes to mix two type of food P and Q in such a way that the vitamin contents of the mixture contain at least 8 unit of vitamins A and 11 units of vitamin B. Food P costs Rs 60/kg and food Q costs Rs 80/kg. Food P contains 3 unit/kg of vitamin A and 5 unit/kg vitamins while Food Q contains 4 unit/kg of vitamin A and 2 unit/kg of vitamin B. Determine the minimum cost mixture.

- 4) एक प्रकार के केक के लिए 200 ग्राम आटा तथा 25 ग्राम वसा की आवश्यकता होती है तथा दूसरी प्रकार के केक के लिए 100 ग्राम आटे तथा 50 ग्राम वसा की आवश्यकता होती है केकों की अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए जो 5 किलो ग्राम आटे तथा 1 किलोग्राम वसा से बन सकते हैं यह मान लिया गया है कि केकों को बनाने के लिए अन्य पदार्थों की कमी नहीं रहेगी।

One type of cake requires 200 grams of flour and 25 grams of fat and the other type of cake requires 100 grams of flour and 50 grams of fat. Find the maximum number of cakes that can be made from 5 kilogram of flour and 1 kilogram of fat. It can be assumed that there will be no shortage of other ingredients to make the cakes.

- 5) एक निर्माणकर्ता नट और बोल्ट का निर्माण करता है एक पैकेट नटों के निर्माण में मशीन A पर 1 घंटा और मशीन B पर 3 घंटे काम करना पड़ता है जबकि एक पैकेट बोल्ट के निर्माण में 3 घंटे मशीन A पर और एक घंटा मशीन B पर काम करना पड़ता है वह नटों से 17.50 रुपए प्रति पैकेट और बोर्ड पर 7 रुपए प्रति पैकेट लाभ कमाता है यह प्रतिदिन मशीनों का अधिकतम उपयोग 12 घंटे किया जाए तो प्रत्येक नट और बोल्ट के कितने पैकेट उत्पादित किया जाए ताकि अधिकतम लाभ कमाया जा सके।

A manufacturer produces nuts and bolts. It takes 1 hour of work on machine A and 3 hours of machine B to product 1 packet of nuts. It takes 3 hour on machine A and 1 hour on machine B to produce 1 packet of bolts. He earns profit of Rs 17.50 packets of each should be produces each day 50 as to maximize his profit, If he operates his machines for at the most 12 hour of the day.

## इकाई 6

### प्रायिकता

#### UNIT 6 (PROBABILITY)

अति लघुउत्तरीय प्रश्न (2 अंक) **Very short answer questions (2 mark)**

प्र. 1 यदि  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$  तथा  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$  हो तो  $P\left(\frac{A}{B}\right)$  एवं  $P\left(\frac{B}{A}\right)$  ज्ञात कीजिए।

If  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{3}$  or  $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$  Find out  $P\left(\frac{A}{B}\right)$  and  $P\left(\frac{B}{A}\right)$

प्र. 2 यदि  $P(A) = 0.8$ ,  $P(B) = 0.5$  और  $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.4$  हो तो  $P(A \cup B)$  ज्ञात कीजिए।

If  $P(A) = 0.8$ ,  $P(B) = 0.5$  and  $P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.4$  then find out  $P(A \cup B)$  Find out.

प्र. 3 दो घनाकार पासे के साथ-साथ उछाले जाते हैं। पहले पासे पर विषम संख्या अथवा योग 9 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Two cuboids die are tossed together. Find the probability of getting an odd number on first die or sum 9.

प्र. 4 दो स्वतंत्र घटनाएँ A व B की प्रायिकताएँ क्रमशः  $P(A) = 0.30$ ,  $P(B) = 0.75$  तो  $P(\overline{A}\overline{B})$  तथा  $P(A\overline{B})$  ज्ञात कीजिए।

Probability of Two independent events. A and B are respectively  $P(A) = 0.30$ ,  $P(B) = 0.75$  then find out  $P(\overline{A}\overline{B})$

प्र.5 सिद्ध कीजिए कि यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो A और B में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता  $1 - P(A')P(B')$

Prove that, If A and B are independent events then probability of occurrence of at least one of A and B is given by  $1 - P(A')P(B')$

लघु उत्तरीय प्रश्न : अंक-04 (Short Answers Questions : Marks 4)

प्र.1 दो थैले A और B में क्रमशः 8 हरी और 9 सफेद तथा 5 हरी और 4 सफेद गेंदें रखी हैं। किसी एक थैले में से यदृच्छया एक गेंद निकाली जाती है जो कि हरी रंग की है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद थैले B से निकाली गयी है।

In two bags there are 8 green and 9 white balls and 5 green and 4 white balls respectively. A ball is taken out at random from one of the bags, which is green in colour. Find the probability that this ball is drawn from bag A.

प्र.2 ताश के 52 पत्तों की एक गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाते हैं। इक्कों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

Two cards are drawn successively with replacement from a well-shuffled deck of 52 cards. Find the probability distribution of the number of aces.

प्र.3 एक यादृच्छिक चर X के संगत प्रायिकता बंटन निम्नानुसार है -

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0	K	2K	K <sup>2</sup>	2K <sup>2</sup>	2K <sup>2</sup> + K

तब ज्ञात कीजिए।

The corresponding probability distribution of a random variable g is as follows -

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0	K	2K	K <sup>2</sup>	2K <sup>2</sup>	2K <sup>2</sup> + K

Then Find the value of is K

- (i) K
- (ii)  $P(X < 2)$
- (iii)  $P(0 < X < 3)$
- (iv)  $P(X > 4)$



- प्र.4 दो थैले I और II दिए हैं। थैले I में 3 लाल और 4 काली गेंदे हैं जबकि थैले II में 5 लाल और 6 काली गेंदे हैं। किसी एक थैले में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गयी है। है जो कि लाल रंग की है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि यह गेंद थैले II से निकाली गयी है।

Bag I contains 3 red and 4 black balls while in another bag II contains 5 red and 6 black balls. One ball is drawn random from one of the bags and it is found to be red. Find the probability that it was drawn from bag II.

- प्र.5 एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को उछालता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में है।

A man is known to speak truth 3 out of 4 times. He throws a die and reports that it is a 6. Find the probability that it is actually a 6.

- प्र.6 एक कलश में 5 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यादृच्छया एक गेंद निकाली जाती है, इसका रंग नोट करने के बाद पुनः कलश में रख दी जाती है। पुनः निकाले गए रंग की दो अतिरिक्त गेंदें कलश में रख दी जाती हैं। तथा कलश में से एक गेंद निकाली जाती है। दूसरी गेंद की लाल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

An urn contains 5 red and 5 black balls. A ball is drawn at random; Its colour is noted and is returned to the urn. Moreover, 2 additional balls of the colour drawn are put in the urn and then a ball is drawn at random. What is the probability that second ball is red.

- प्र.7 एक सिक्के की दो उछालों में चितों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। साथ ही माध्य और प्रसरण भी ज्ञात कीजिए।

Find the probability distribution of the number of heads in two tosses of a coin. Also, Find the mean and variance.

- प्र.8 52 पत्तों की अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी में से एक के बाद एक तीन पत्ते बिना प्रतिस्थापित किये गये निकाले गए। पहले दो पत्तों का बादशाह और तीसरे का इक्का होने की क्या प्रायिकता है।

Three cards are drawn successively without replacement from a pack of 52 well-shuffled cards. What is the probability that first two cards are kings and the third card drawn is an ace?



