अनुक्रमांक ____________

नाम _

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 12

131

324(IX)

2025

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट

पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First **15** minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.

सामान्य निर्देश :

(i) इस प्रश्न-पत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं ।

(ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।

(iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्ट उल्लेख है कि उसके कितने खण्ड करने हैं ।

(iv) प्रत्येक प्रश्न के अंक उसके सम्मुख अंकित हैं ।

(v) प्रथम प्रश्न से आरंभ कीजिए और अंत तक करते जाइए । जो प्रश्न न आता हो, उसमें व्यर्थ समय नष्ट न कीजिए ।

General Instructions :

(i) There are in all **nine** questions in this question paper.

(ii) **All** questions are compulsory.

(iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

(iv) Marks allotted to the questions are indicated against them.

(v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one. Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. **सभी खण्ड कीजिए ।**

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए ।

(क) $f(x) = |x|$ **द्वारा प्रदत्त मापांक फलन** $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^{+}$ **है** 1

(A) एकैकी और आच्छादक

(B) बहु-एकैकी और आच्छादक

(C) एकैकी, किन्तु आच्छादक नहीं

(D) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

(ख) **एक सम्बन्ध** $\mathrm{R} = \{(a, b) : a = b - 1, b \geq 3\}$ **समुच्चय N पर परिभाषित है तो :** 1

(A) $(2, 4) \in \mathrm{R}$

(B) $(4, 5) \in \mathrm{R}$

(C) $(4, 6) \in \mathrm{R}$

(D) $(1, 3) \in \mathrm{R}$

(ग) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ **का मान होगा :** 1

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{8}$

(घ) अवकल समीकरण 1

$$9\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}$$ की घात है :

(A) 1

(B) 6

(C) 3

(D) 2

(ङ) व्यंजक $\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \times \hat{k}$ का मान है : 1

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

1. Do **all** parts.

Select the correct option of each part and write it on your answer-book.

(a) The modulus function $f: R \rightarrow R^+$ given by $f(x) = |x|$ is 1

(A) one-one and onto

(B) many-one and onto

(C) one-one but not onto

(D) neither one-one nor onto

(b) A relation $R = \{(a, b) : a = b - 1, b \geq 3\}$ is defined on set N, then 1

(A) $(2, 4) \in R$

(B) $(4, 5) \in R$

(C) $(4, 6) \in R$

(D) $(1, 3) \in R$

(c) The value of $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$ will be 1

(A) 0

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{8}$

(d) The degree of differential equation 1

$9\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}$ is

(A) 1

(B) 6

(C) 3

(D) 2

(e) The value of expression $\hat{i} \cdot \hat{i} - \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \times \hat{k}$ is 1

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

2. सभी खण्ड कीजिए :

(क) $\cot^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right\}; x > 1$ को सरलतम रूप में लिखिए। 1

(ख) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x|,\ x = 0$ पर संतत है। 1

(ग) अवकल समीकरण 1

$$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2$$ की घात ज्ञात कीजिए।

(घ) यदि $P(A) = 0.12$, $P(B) = 0.15$ और $P(B/A) = 0.18$ तो $P(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

(ङ) सदिशों $-2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ और $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

2. Do **all** parts :

(a) Write $\cot^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right\}; x > 1$ in the simplest form. 1

(b) Prove that the function $f(x) = |x|$, is continuous at $x = 0$. 1

(c) Find the degree of the differential equation **1**

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\left(\frac{dy}{dx}\right)=2$$

(d) If P(A) = 0.12, P(B) = 0.15 and P(B/A) = 0.18, then find the value of $P(A \cap B)$. **1**

(e) Find the angle between the vectors $-2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ and $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$. **1**

3. **सभी खण्ड कीजिए :**

(क) यदि $f: R \rightarrow R$ तथा $g: R \rightarrow R$ फलन क्रमशः $f(x) = \cos x$ तथा $g(x) = 3x^2$ द्वारा परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए $gof \neq fog$. **2**

(ख) अवकल समीकरण $ydx + (x - y^2)dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए। **2**

(ग) सिद्ध कीजिए कि (4, 4, 2), (3, 5, 2) तथा (–1, –1, 2) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं। **2**

(घ) यदि $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, तो x, y, z के मान ज्ञात कीजिए। **2**

3. Do **all** parts :

(a) If $f: R \rightarrow R$ and $g: R \rightarrow R$ be functions defined by $f(x) = \cos x$ and $g(x) = 3x^2$ respectively, then prove that $gof \neq fog$. **2**

(b) Find the general solution of differential equation $ydx + (x - y^2)dy = 0$. **2**

(c) Prove that (4, 4, 2), (3, 5, 2) and (–1, –1, 2) are vertices of a right angle triangle. **2**

(d) If $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, then find the values of x, y, z. **2**

4. सभी खण्ड कीजिए :

(क) दर्शाइए कि फलन $f(x) = 7x^2 - 3$ एक वर्धमान फलन है जबकि $x > 0$ है। **2**

(ख) सदिश $(\vec{a} + \vec{b})$ और $(\vec{a} - \vec{b})$ में से प्रत्येक पर लंबवत मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए, जहाँ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. **2**

(ग) यदि एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ है, तो इसका सदिश रूप में समीकरण ज्ञात कीजिए। **2**

(घ) एक थैले में 4 सफेद और 2 काली गेंद हैं तथा दूसरे थैले में 3 सफेद और 5 काली गेंद हैं। यदि प्रत्येक थैले से एक गेंद निकाली जाये तो दोनों गेंद काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। **2**

4. Do **all** parts :

(a) Show that the function $f(x) = 7x^2 - 3$ is an increasing function when $x > 0$. **2**

(b) Find the unit vector perpendicular to each of the vectors $(\vec{a} + \vec{b})$ and $(\vec{a} - \vec{b})$ where $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$. **2**

(c) If the Cartesian equation of a line is $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$, then find its equation in vector form. **2**

(d) There are 4 white and 2 black balls in a bag and in another bag 3 white and 5 black balls. Find the probability of getting both black balls if a ball is drawn from each bag. **2**

5. सभी खण्ड कीजिए :

(क) यदि R_1 तथा R_2 समुच्चय A में दो तुल्यता संबंध हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी एक तुल्यता संबंध है। 5

(ख) यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(I + A) = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. 5

(ग) $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए। 5

(घ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ तथा $\vec{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

(ङ) यदि $y = e^{\tan^{-1} x}$ सिद्ध कीजिए कि $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$ 5

5. Do **all** parts :

(a) If R_1 and R_2 be two equivalence relations on a set A, then prove that $R_1 \cap R_2$ be also an equivalence relation. 5

(b) If $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, then prove that $(I + A) = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. 5

(c) Differentiate $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$ with respect to x. 5

(d) Find shortest distance between the lines **5**

$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) + \mu(3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$

(e) If $y = e^{\tan^{-1} x}$, prove that $(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x - 1)\frac{dy}{dx} = 0.$ **5**

6. **सभी खण्ड कीजिए :**

(क) यदि $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{यदि } x \le -1 \\ 2x & -1 < x \le 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ **5**

तब $x = -1$ तथा $x = 1$ पर फलन के संतत की जाँच कीजिए ।

(ख) तीन सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ प्रतिबंध $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ को संतुष्ट करते हैं । यदि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ और $|\vec{c}| = 2$, तो $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए । **5**

(ग) हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ cm/s की दर से बढ़ रही है । बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 cm है ? https://www.upboardonline.com **5**

(घ) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत $Z = 3x + 2y$ का आलेखीय विधि से न्यूनतमीकरण कीजिए जबकि : **5**

$x + y \ge 8,$

$3x + 5y \le 15,$

$x \ge 0, y \ge 0$

(ङ) किसी प्रश्न को तीन छात्रों A, B, C के द्वारा हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}$ तथा $\frac{1}{10}$ है, तो प्रश्न के हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । **5**

6. Do **all** parts :

(a) If $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{if } x \le -1 \\ 2x & -1 < x \le 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$ **5**

Then test the continuity of the function at $x = -1$ and at $x = 1$.

(b) If three vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ satisfying the condition $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. If $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ and $|\vec{c}| = 2$, then find the value of $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$. **5**

(c) The radius of an air bubble is increasing at the rate of $\frac{1}{2}$ cm/s. At what rate is the volume of the bubble increasing while the radius is 1 cm ? **5**

(d) Minimize $Z = 3x + 2y$ by graphical method under the following constraints : **5**

$x + y \ge 8,$

$3x + 5y \le 15,$

$x \ge 0, y \ge 0$

(e) The probability of solving a question by the three students A, B, C are respectively $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}$ and $\frac{1}{10}$. Find the probability of solving the question. **5**

7. **कोई एक खण्ड कीजिए :**

(क) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।** **8**

(ख) **समीकरण निकाय** **8**

$3x - 2y + 3z = 8$

$2x + y - z = 1$

$4x - 3y + 2z = 4$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए ।

7. Do any **one** part :

(a) Find the inverse of the matrix **8**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Solve the system of equations by matrix method : **8**

$3x - 2y + 3z = 8$

$2x + y - z = 1$

$4x - 3y + 2z = 4$

8. **कोई एक खण्ड कीजिए :**

(क) सिद्ध कीजिए कि दी गई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध-शीर्ष कोण $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ होता है। **8**

(ख) अवकल समीकरण $(x - y)(dx + dy) = dx - dy$ का एक विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, जबकि $y = -1$ यदि $x = 0$ **8**

8. Do any **one** part :

(a) Prove that the semi-vertical angle of a cone with given slant height and maximum volume is $\tan^{-1}(\sqrt{2})$. **8**

(b) Find a particular solution of the differential equation **8**

$(x - y)(dx + dy) = dx - dy$ when $y = -1$ if $x = 0$.

9. कोई **एक** खण्ड कीजिए :

(क) समाकलन कीजिए : 8

$$\int \left(\frac{2 + \sin 2x}{1 + \cos 2x}\right) e^x \, dx$$

(ख) हल कीजिए : 8

$$\int \frac{(3x + 5)dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

9. Do any **one** part :

(a) Integrate : 8

$$\int \left(\frac{2 + \sin 2x}{1 + \cos 2x}\right) e^x \, dx$$

(b) Solve : 8

$$\int \frac{(3x + 5)dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$$